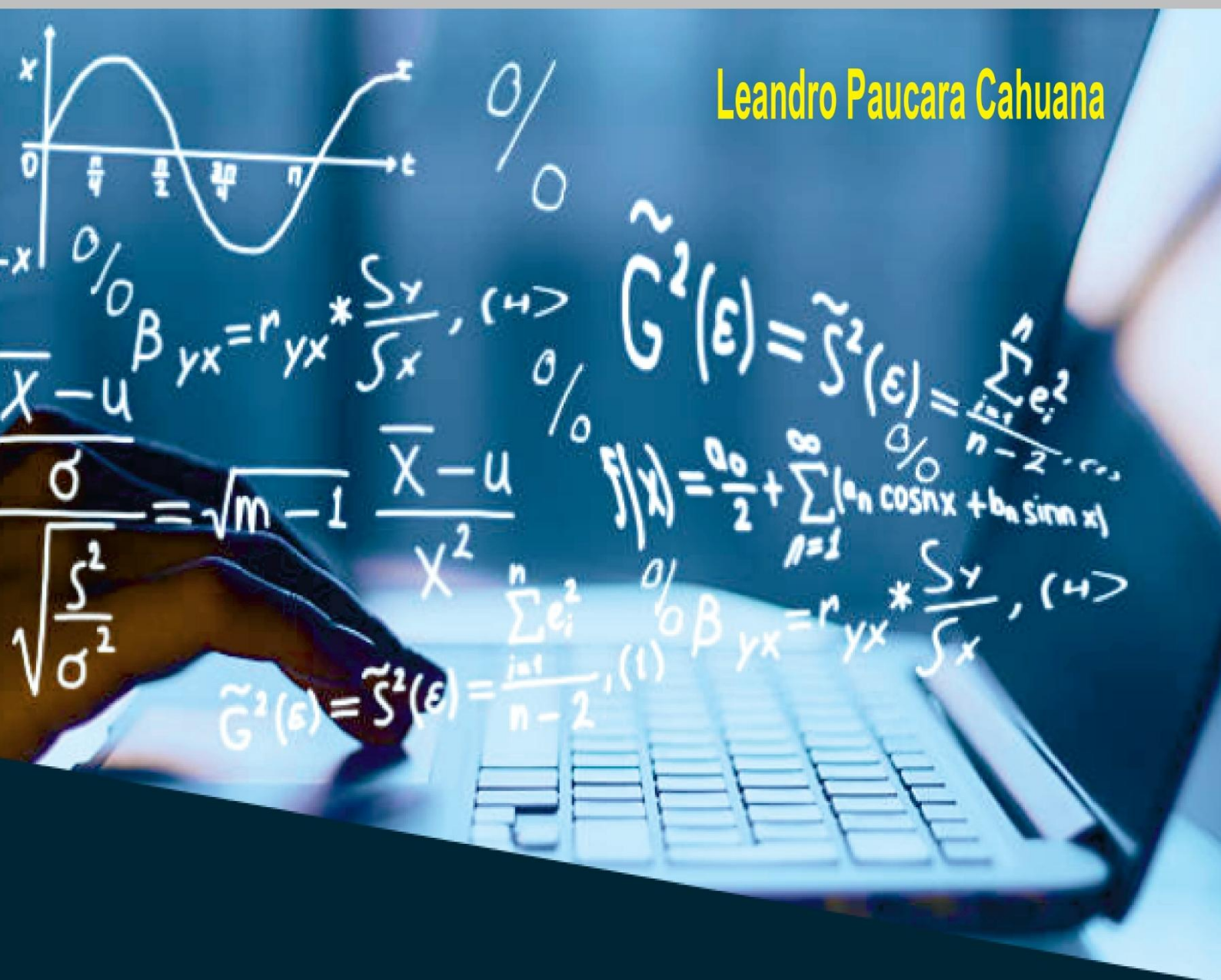


CÁLCULO DIFERENCIAL

Leandro Paucara Cahuana



Cálculo diferencial

DOI: <https://doi.org/10.62785/iladesa.b.6>

ISBN: 978-612-49706-7-2

Leandro Paucara Cahuana

 <https://orcid.org/0000-0003-0282-7936>

Universidad Nacional de Juliaca, Perú

paucaracl@gmail.com

Leandro Paucara Cahuana

Cálculo diferencial



Cálculo diferencial

Autor

© Leandro Paucara Cahuana

Editorial:

© Instituto Latinoamericano de Investigación y Desarrollo Social

Av. Arguedas Mz. K Lt. 13, Juliaca - Perú

Teléfono: +51 925 576 639

E-mail: editorial@iladesa.org

Sitio web: <https://editorial.iladesa.org>

Sello editorial: 978-612-49706

Primera edición digital, julio del 2025

Libro electrónico disponible en: <https://editorial.iladesa.org>

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

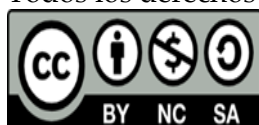
ISBN: 978-612-49706-7-2

Depósito Legal N°: 2025-07245

DOI: <https://doi.org/10.62785/iladesa.b.6>

Publicado en Perú / Published in Peru

Todos los derechos reservados.



ISBN: 978-612-49706-7-2



Índice

Presentación	10
Resumen	11
Abstract	12
Introducción	13

Capítulo I

La derivada

1.1. ¿Qué es la derivada?	15
1.2. Notaciones históricas y modernas	16
Ejercicios de aplicación	18
1.3. Derivada por definición en un punto	23

Capítulo II

Derivadas laterales

2.1. ¿Qué son las derivadas laterales?	29
Ejercicios de aplicación	31
2.2. Análisis de la derivabilidad de las funciones.....	35
Ejercicios de aplicación	40

Capítulo III

Cálculo de derivadas con fórmulas básicas

3.1. Derivada de un número o una constante.....	41
3.2. Derivada de potencias y raíces	42
3.3. Derivadas de expresiones trigonométricas	46
Ejercicios de aplicación	48

Capítulo IV

Algebra de derivadas

4.1. Regla de la suma y la resta	51
4.2. Regla del producto.....	52
4.3. Regla de la recíproca	54

4.4. Regla de la derivada de la división	54
4.5. Derivaciones inversas	56
Ejercicios de aplicación	57

Capítulo V

Regla de la cadena

5.1. Teorema y demostración básica	58
5.2. Derivada de una función elevada a un exponente	59
Ejercicios de aplicación	60
5.3. Derivada de una función exponencial con base e	62
5.4. Derivada de una función exponencial con base " >1 "	63
5.5. Derivada de Funciones logarítmicas.....	64

Capítulo VI

Derivada de funciones trigonométricas

6.1. Derivada de una función seno	67
6.2. Derivada de una función coseno.....	68
6.3. Derivada de una función tangente	69
6.4. Derivada de una función cotangente	69
6.5. Derivada de una función cosecante	71
6.6. Relaciones en derivadas trigonométricas	73
6.7. Derivada de una función arcocoseno.....	74
6.8. Derivada de funciones hiperbólicas.....	78
Ejercicios de aplicación	82

Capítulo VII

Derivación paramétrica

7.1. Introducción a la parametrización de curvas	93
7.2. Ecuaciones paramétricas.....	94
Ejercicios de Aplicación.....	96

Capítulo VIII

Derivada implícita

8.1. Método de derivadas parciales	106
8.2. Reglas de diferenciación implícita	107
Ejercicios de aplicación	109

Capítulo IX

Derivación logarítmica

9.1. Derivada de funciones exponenciales.....	119
---	-----

Ejercicios de aplicación	123
--------------------------------	-----

Capítulo X

Derivadas de orden superior

10.1. ¿Qué son las derivadas de orden superior?	131
10.2. ¿Aplicaciones de las derivadas de orden superior?	132
10.3. Método de Leibniz para la derivada enésima	133
Ejercicios de aplicación	134

Capítulo XI

Interpretación geométrica de la derivada

11.1. Recta tangente y normal	142
11.2. Máximos, mínimos y aplicaciones físicas	143
Ejercicios de aplicación	144
Bibliografía.....	149

Presentación

Cálculo Diferencial nace con un propósito claro: ofrecer un puente sólido entre la intuición y el rigor matemático, para que el estudiante comprenda qué es una derivada, por qué importa y cómo aplicarla con solvencia en problemas reales. El libro avanza desde ideas accesibles, la tasa de cambio y la pendiente de la tangente, hacia formulaciones precisas basadas en límites, cuidando que cada nuevo concepto se sustente en ejemplos significativos y en una práctica guiada y progresiva.

La obra está pensada para cursos iniciales de Cálculo en carreras de Ingeniería, Ciencias, Economía y Educación, y supone como prerrequisito únicamente un manejo básico de álgebra y trigonometría. Su enfoque didáctico combina tres ejes: (i) construcción conceptual paso a paso, (ii) formalización limpia y sin ambigüedades, y (iii) aplicación a situaciones de modelado, optimización e interpretación de resultados. Por eso, cada sección introduce la idea central, la formula con precisión y la ejerce mediante problemas graduados que fortalecen la técnica y, a la vez, el criterio.

La estructura responde a una progresión natural del contenido. Iniciamos con la definición de derivada y sus notaciones, para luego estudiar las derivadas laterales y los casos en que la diferenciabilidad falla (discontinuidades, esquinas, cúspides). A continuación, se presentan las reglas básicas y el álgebra de derivación, así como la regla de la cadena; se incluyen capítulos específicos para la diferenciación implícita, paramétrica y logarítmica, y un tratamiento de las derivadas de orden superior con miras a la concavidad, el criterio de extremos y la aproximación mediante polinomios de Taylor. El recorrido culmina con la interpretación geométrica y aplicaciones que conectan la teoría con problemas de física e ingeniería.

Para acompañar el aprendizaje, el texto ofrece ejemplos resueltos con comentarios pedagógicos, advertencias sobre errores frecuentes, y conjuntos de ejercicios propuestos organizados por nivel de dificultad. Los apéndices condensan fórmulas y tablas de uso común, así como la notación empleada, de manera que el estudiante disponga de un material de consulta rápido mientras avanza en los capítulos.

Con este equilibrio entre comprensión, formalismo y práctica, *Cálculo Diferencial* busca ser un recurso confiable tanto para el estudio autónomo como para la enseñanza en aula, cultivando no solo la habilidad de calcular derivadas, sino, sobre todo, la capacidad de pensar con ellas.

El autor

Resumen

Cálculo Diferencial ofrece una introducción rigurosa y pedagógica al estudio de la derivada como tasa de cambio instantánea y como pendiente de la recta tangente. El texto avanza desde la definición formal vía límites y la exposición de notaciones clásicas hasta el análisis de derivadas laterales y de los casos en que la diferenciabilidad falla (discontinuidades, esquinas, cúspides, tangentes verticales). Desarrolla con claridad las reglas básicas y el álgebra de derivación, la Regla de la Cadena y técnicas específicas de diferenciación implícita, paramétrica y logarítmica. Incluye un tratamiento de las derivadas de orden superior orientado a la concavidad, la identificación de extremos y la aproximación local mediante polinomios de Taylor. El libro culmina con la interpretación geométrica y un conjunto de aplicaciones en física, ingeniería y economía (velocidad, aceleración, optimización, esbozo de curvas), reforzadas por ejemplos comentados, advertencias sobre errores frecuentes y ejercicios graduados para la práctica autónoma o guiada. Apéndices con notación, tablas y resúmenes operativos facilitan la consulta rápida. Concebido para cursos iniciales en ciencias e ingeniería, el enfoque integra intuición, formalismo y resolución de problemas, buscando que el estudiante no solo calcule derivadas con solvencia, sino que desarrolle criterio para modelar y argumentar con ellas.

Palabras clave: Derivada, límites y continuidad, regla de la cadena, diferenciación implícita, optimización.

Abstract

Differential Calculus offers a rigorous and pedagogical introduction to the study of the derivative as an instantaneous rate of change and as the slope of the tangent line. The text progresses from the formal definition via limits and the exposition of classical notations to the analysis of lateral derivatives and cases in which differentiability fails (discontinuities, corners, cusps, vertical tangents). It clearly develops the basic rules and algebra of differentiation, the Chain Rule, and specific techniques of implicit, parametric, and logarithmic differentiation. It includes a treatment of higher-order derivatives oriented toward concavity, the identification of extrema, and local approximation using Taylor polynomials. The book culminates with geometric interpretation and a set of applications in physics, engineering, and economics (velocity, acceleration, optimization, curve sketching), reinforced by annotated examples, warnings about common errors, and graded exercises for independent or guided practice. Appendices with notation, tables, and operational summaries facilitate quick reference. Designed for introductory courses in science and engineering, the approach integrates intuition, formalism, and problem solving, seeking not only to enable students to calculate derivatives competently, but also to develop criteria for modeling and arguing with them.

Key words: Derivative, limits and continuity, chain rule, implicit differentiation, optimization.

Introducción

El Cálculo Diferencial estudia con rigor una idea sencilla y poderosa: cómo cambia una cantidad en un instante. La derivada, entendida a la vez como tasa de variación instantánea y como pendiente de la recta tangente, permite modelar movimientos, crecimientos y procesos de optimización en física, ingeniería, economía y ciencias de la vida. Este libro busca tender un puente claro entre la intuición, el rigor y la técnica, para que el lector no solo calcule, sino que piense con derivadas.

La obra está dirigida a estudiantes de primeros cursos universitarios en ingeniería y ciencias, así como a docentes que requieren un material estructurado, autocontenido y progresivo. Se asume un manejo básico de álgebra, funciones y trigonometría; los elementos esenciales de límites y continuidad se presentan cuando son necesarios para fundamentar la definición de derivada y sus propiedades. El enfoque privilegia la comprensión conceptual sin sacrificar precisión ni destreza operativa.

La organización responde a una progresión natural. Se inicia con la definición formal de la derivada a partir del cociente incremental y su interpretación geométrica y física. Luego se estudian las derivadas laterales y los casos en que la diferenciabilidad falla, como discontinuidades, esquinas, cúspides y tangentes verticales. Con esa base se desarrollan las reglas básicas y el álgebra de la derivación, incluida la regla de la cadena, y se presentan técnicas específicas de diferenciación paramétrica, implícita y logarítmica. El recorrido se completa con las derivadas de orden superior, la concavidad, los criterios de extremos y las aproximaciones locales de tipo Taylor, y con la interpretación geométrica y aplicaciones al esbozo de curvas y a problemas de optimización.

La metodología combina ejemplos comentados, contraejemplos que afinan el criterio y ejercicios graduados que van de lo elemental a lo desafiante. Cada sección destaca errores frecuentes, como confundir continuidad con derivabilidad o forzar la evaluación de un cociente cuando el intervalo considerado es nulo, e incluye recomendaciones prácticas para verificar resultados, entre ellas revisar dominios, unidades y comportamiento gráfico. Para facilitar el estudio, el libro adopta una notación consistente y ofrece, al final, bibliografía de consulta y tablas de uso común.

Este texto se concibe como base sólida del cálculo en una variable. La integración, las ecuaciones diferenciales y la extensión a varias variables se mencionan únicamente para motivar ideas, y su desarrollo sistemático queda para cursos y volúmenes posteriores. Con esta orientación, el lector encontrará un camino claro y exigente para dominar el lenguaje del cambio: la derivada.

Capítulo I

La derivada

La derivada es la herramienta central del cálculo para medir cómo cambia una magnitud en un instante. Partimos de la tasa de variación promedio (cociente incremental) y, al hacer que el intervalo de tiempo o de entrada tienda a cero, obtenemos la tasa de cambio instantánea, definida rigurosamente como un límite. Este capítulo presenta la definición formal de derivada, sus notaciones históricas y modernas, y su doble interpretación: geométrica, como pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, y física/económica, como velocidad instantánea o costo marginal. Examinamos condiciones básicas de existencia, la relación “derivable $\Rightarrow$ continua”, y ejemplos y contraejemplos (incluyendo funciones con esquinas o cúspides). Finalmente, introducimos la derivada como función, discutimos errores comunes al manipular el límite (la indeterminación $0/0$ y cerramos con una batería de ejercicios guiados que conectan la intuición con el rigor, preparando el terreno para las reglas de derivación y aplicaciones de capítulos posteriores.

1.1. ¿Qué es la derivada?

La derivada de una función en un punto es el concepto fundamental del cálculo diferencial y formaliza la idea de la tasa de cambio instantánea o la pendiente de la recta tangente en un punto específico de su gráfica.

Sea la función $f: R \rightarrow R$ tal que $y = f(x)$

La derivada de una función $f'(x)$ representa a todas las pendientes de las rectas tangentes de los puntos de la curva y está dada como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de esta nueva función $f'(x)$ (Derivada) son todos los puntos del dominio de la función inicial $f(x)$ que hacen que el límite exista, es decir:

$$Dom(f'(x)) \subset Dom(f(x))$$

1.2. Notaciones históricas y modernas

Distintos matemáticos desarrollaron notaciones para la derivada, cada una con sus ventajas y que aún se usan en contextos específicos.

- Notación de Newton (Fluxiones):
 - Símbolo: y' (y punto).
 - Uso: Newton denotaba las derivadas con respecto al tiempo. Es muy común en física e ingeniería para representar velocidades (derivadas de la posición respecto al tiempo) y aceleraciones.
 - Ejemplo: Si $s(t)$ es la posición, $s'(t)$ es la velocidad y $s''(t)$ es la aceleración.
- Notación de Leibniz (Diferenciales):
 - Símbolo:

$$\frac{dy}{dx}$$
 - Uso: Gottfried Wilhelm Leibniz introdujo esta notación, que es extremadamente sugerente. Trata la derivada como un cociente de "infinitésimos" (dy y dx). Esta perspectiva es muy útil en aplicaciones físicas y para recordar reglas como la de la cadena ($dx dy = du dy \cdot dx du$).
 - Ejemplo: La derivada de $y = x^2$ se escribe $dy/dx = 2x dx/dx = 2x$.
- Notación de Lagrange:
 - Símbolo: $f'(x)$ (f prima de x).
 - Uso: Introducida por Joseph-Louis Lagrange, es la notación más común en matemáticas puras por su brevedad y claridad para hablar de la función derivada. Se puede extender a derivadas de orden superior: $f''(x)$ (segunda derivada), $f'''(x)$ (tercera derivada).
 - Ejemplo: Si $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.
- Notación de Cauchy (Operador D):
 - Símbolo: D_x o $Df(x)$.
 - Uso: Augustin-Louis Cauchy popularizó esta notación de operador, que es muy poderosa. D_x significa "la derivada con respecto a x ". Es especialmente

útil para derivadas de orden superior, donde se escribe $D_x^2 y$ para la segunda derivada.

- Ejemplo: $D_x(x^3) = 3x^2$, $D_x(3x^2) = 6x$.

Resumen de otras notaciones:

- $f'(x)$: Notación de Lagrange, la más común.
- $dx dy$: Notación de Leibniz, muy intuitiva.
- $\dot{y}$: Notación de Newton, usada para derivadas temporales.
- $D_x f$: Notación de operador, útil en contextos formales.
- y' : Una abreviación de la notación de Lagrange cuando el contexto es claro.

Durante el desarrollo histórico del cálculo diferencial, cuatro matemáticos notables introdujeron notaciones para representar el operador de la derivada.

Siendo $y = f(x)$

Notación	Propuesto	Observación
y'	Newton	Era su propia notación
f'	Lagrange	Influencia de Newton
$\frac{d}{dx}$	Leibniz	Ofrece una mejor perspectiva para la comprensión y solución de problemas
D_x	Cauchy	Mayor uso en las Ecuaciones diferenciales

Otras notaciones: $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$; $D_x y$; $D_x f$

Por lo tanto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Algunos textos de cálculo (Franz Ayres, Piskunov, etc) usan la siguiente expresión en la derivada.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Es prácticamente lo mismo así que no te preocupes.

Ejercicios de aplicación

Manzanita 1

Derivar usando la definición $f(x) = -3x^2$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = -3x^2$$

$$f(x+h) = -3(x+h)^2 = -3[x^2 + 2xh + h^2]$$

$$f(x+h) = -3x^2 - 6xh - 3h^2$$

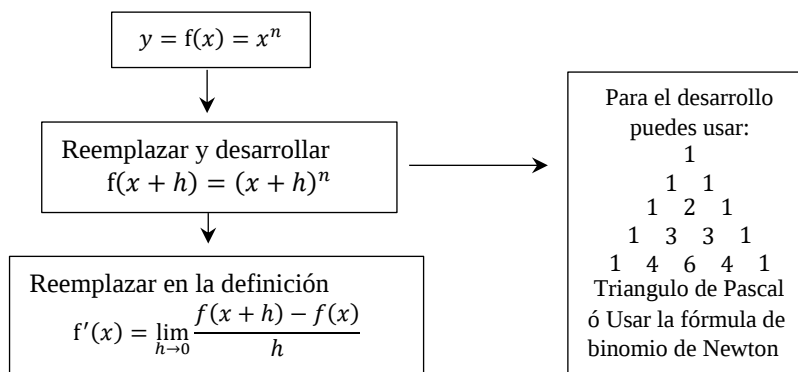
Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3x^2 - 6xh - 3h^2 - (-3x^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6xh - 3h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} -6x - 3h = -6x$$

$$f'(x) = -6x$$



Nota: Sólo si el docente es mezquino lo desarrollas completo ya que solo necesitamos el 1er y 2do término de la expresión, a continuación, pondré algunos ejemplos.

$$(x+h)^4 = (x^4 + 4x^3h + \dots)$$

$$(x+h)^7 = (x^7 + 7x^6h + \dots)$$

$$(x+h)^{18} = (x^{18} + 18x^{17}h + \dots)$$

• Derivar usando la definición $f(x) = 2x^3$

$$f(x+h) = 2(x+h)^3 = 2(x^3 + 3x^2h + \dots)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2h - (2x^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2h}{h}$$

$$f'(x) = 6x^2$$



¿Por qué solo se toman 2 términos?

Porque el resto de términos son innecesarios, ya que el resto de términos tiene la variable h el cual al reemplazarlo solo los anula; más bien ¿ya puedes hallar los dos términos? Pista el 1er término es “ x ” elevado al exponente y en el 2do término el coeficiente es el grado del 1er término, “ x ” elevado al exponente disminuido en 1 y acompañado de h .

Manzanita 2

Derivar usando la definición $f(x) = \frac{1}{x-5}$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

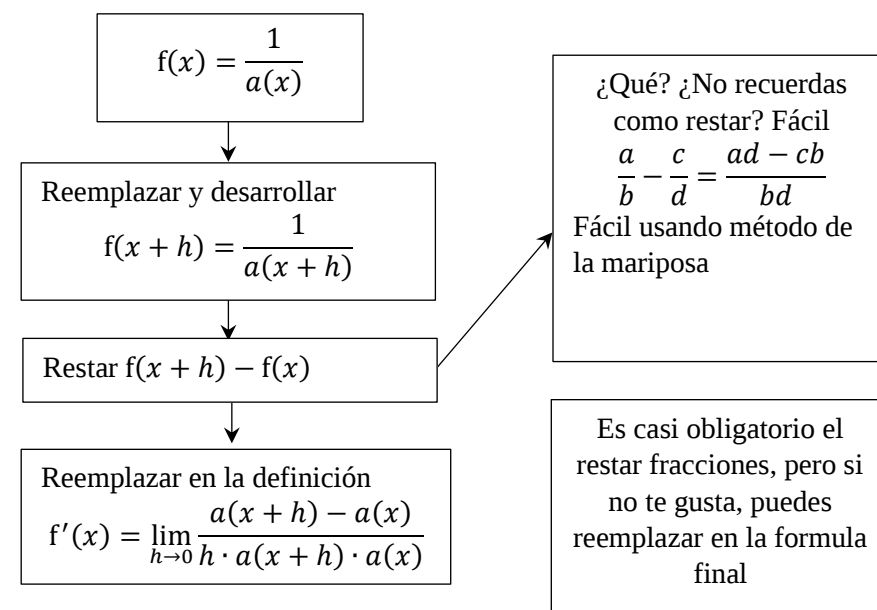
$$f(x+h) = \frac{1}{x+h-5}$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h-5} - \frac{1}{x-5}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-5 - (x+h-5)}{(x+h-5)(x-5)}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h-5)(x-5)} = \frac{-1}{(x-5)^2}$$



Manzanita 3

Derivar usando la definición $f(x) = \sqrt{3x+1}$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

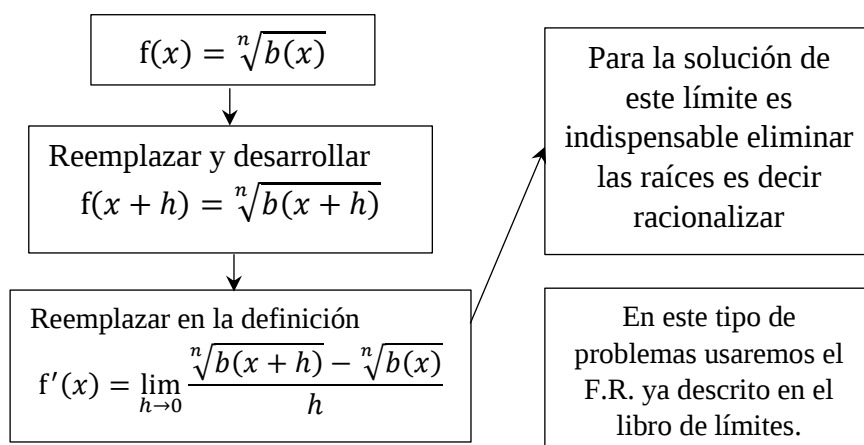
$$f(x+h) = \sqrt{3(x+h)+1}$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+1 - (3x+1)}{h(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$



• Derivar usando la definición $f(x) = \sqrt[4]{3x^2+2}$

$$f(x+h) = \sqrt[4]{3(x+h)^2+2} = \sqrt[4]{3x^2+6xh+\dots+2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{3x^2+6xh+2} - \sqrt[4]{3x^2+2}}{h} \times \frac{FR}{FR}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2+6xh+2 - (3x^2+2)}{h \cdot FR}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh}{h \cdot FR} = \frac{6x}{4(\sqrt[4]{3x^2+2})^3}$$

Manzanita 4

Derivar usando la definición $f(x) = \cos(3x)$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = \cos(3x)$$

$$f(x+h) = \cos[3(x+h)] = \cos[3x+3h]$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos[3x+3h] - \cos(3x)}{h}$$

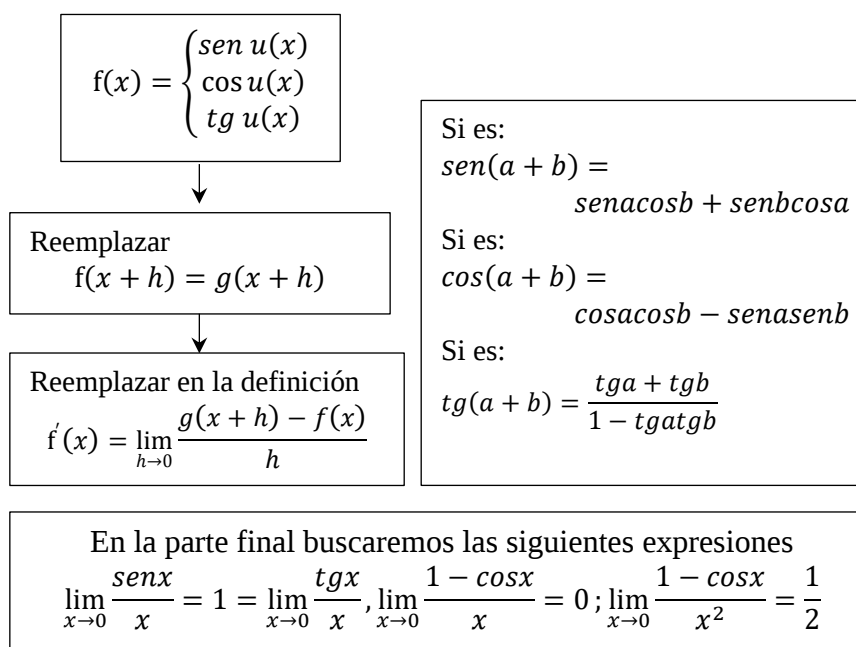
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cos 3h - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3h - \cos(3x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 3x [\cos 3h - 1] - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos 3x [\cos 3h - 1]}{h} - \frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3h}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos 3x (0) - 3 \operatorname{sen} 3x \frac{\operatorname{sen} 3h}{3h} \right]$$

$$f'(x) = \cos 3x (0) - 3 \operatorname{sen} 3x (1) = -3 \operatorname{sen} 3x$$



Manzanita 5

Derivar usando la definición $f(x) = \ln x$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x+h) = \ln(x+h)$$

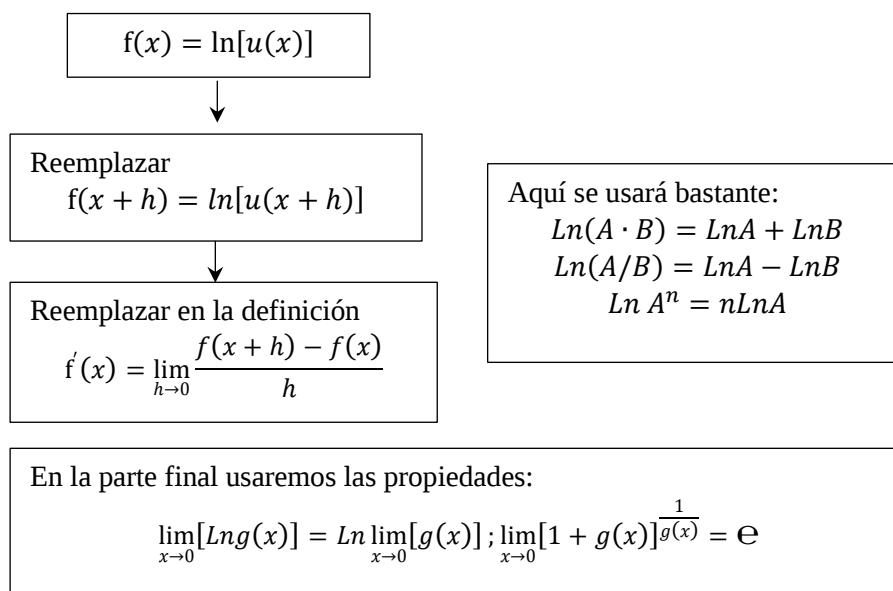
Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\frac{x+h}{x} \right]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left[\frac{x+h}{x} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{h}{x} \right]^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = \ln \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{h}{x} \right]^{\frac{1}{h}} \right) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(\left[1 + \frac{h}{x} \right]^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \ln(\mathbf{e})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln \mathbf{e} = \frac{1}{x}$$



Manzanita 6

Derivar usando la definición $f(x) = 4^x$

Solución:

Recordando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos.

$$f(x) = 4^x$$

$$f(x+h) = 4^{x+h}$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4^{x+h} - 4^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4^x(4^h - 1)}{h}$$

Hacemos un cambio de variable

$$a = 4^h - 1 \Leftrightarrow a + 1 = 4^h \Leftrightarrow \ln(a + 1) = h \ln 4$$

$$\therefore h = \frac{\ln(a + 1)}{\ln 4}; h \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow 0$$

Reemplazamos en el límite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 4^x \frac{a}{\frac{\ln(a + 1)}{\ln 4}} = \lim_{h \rightarrow 0} 4^x \ln 4 \frac{a}{\ln(a + 1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 4^x \ln 4 \frac{1}{\frac{1}{a} \ln(a + 1)}$$

$$f'(x) = 4^x \ln 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(a + 1)^{\frac{1}{a}}}$$

$$f'(x) = 4^x \ln 4 \frac{1}{\ln e} = 4^x \ln 4$$

1.3. Derivada por definición en un punto

Siendo $y = f(x)$; su respectiva derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x)$$

Se pide evaluar en un punto “a” es decir:

$$f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = D_x f(a)$$

Esas son las notaciones de la derivada en un punto; para su respectivo cálculo se dará a conocer 3 métodos.

Método 1. Se seguirá el siguiente procedimiento:

Siendo $y = f(x)$

1. Se hallará la derivada de la función por definición.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Determinada la función $f'(x)$; solo queda reemplazar “ $x = a$ ”

Este método es el más frecuente ya que obtenida la función derivada puedes hallar su valor numérico en cualquier punto que desees.

Manzanita 7

Calcular la derivada de $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h - 3$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

Nos piden en $x = 2$

$$f'(2) = 2(2) - 3 = 1$$

Método 2. Una ligera variación del método anterior.

Siendo $y = f(x)$

1. Se determinará “ $f(a)$ ” y el respectivo $f(a+h)$.

2. Reemplazaremos en la siguiente formula:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El detalle que solo te da el valor numérico de la derivada en ese punto.

Manzanita 8

Calcular la derivada de $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$ en

$$x = \pi/6$$

Solución:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

Calculamos.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = \frac{\pi}{6} + h + \operatorname{sen} \left[2\left(\frac{\pi}{6} + h\right)\right]$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{6} + h + \operatorname{sen} \left[2\left(\frac{\pi}{6} + h\right)\right] - \left[\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right]}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{3} + 2h\right] - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos 2h + \operatorname{sen} 2h \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} [\cos 2h - 1]}{h} + \frac{\operatorname{sen} 2h \cos \frac{\pi}{3}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} [\cos 2h - 1]}{h} + \frac{\operatorname{sen} 2h \cos \frac{\pi}{3}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + 2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} [\cos 2h - 1]}{2h} + 2 \frac{\operatorname{sen} 2h \frac{1}{2}}{2h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2(0) + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Método 3. Este método se podría considerar como un cambio de variable en el límite.

Siendo $y = f(x)$

1. Se determinará “ $f(a)$ ”.

2. Reemplazaremos en la siguiente formula:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Este método resulta mucho más practico que los anteriores sin embargo como el método 2 solo te da la derivada en ese punto.

Manzanita 9

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ en
 $x = 3$

Solución:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Calculamos.

$$f(3) = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Reemplazamos en la formula:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 5} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Prueba de habilidades

En las preguntas del 1 al 13 derivar usando definición.

1.- $f(x) = 4x^2 + x - 8$

Rpta. $8x + 1$

2.- $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

Rpta. $\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3.- $f(x) = \frac{3}{x}$

Rpta. $-3x^{-2}$

4.- $f(x) = \frac{1}{x-4}$

Rpta. $-(x-4)^{-2}$

5.- $f(x) = \sqrt{5x+1}$

Rpta. $\frac{5}{2}(5x+1)^{\frac{1}{2}}$

6.- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8x+1}}$

Rpta. $-\frac{4}{(8x+1)^{3/2}}$

7.- $f(x) = \text{sen}(x+4)$

Rpta. $\cos(x+4)$

8.- $f(x) = \text{tg}(8x+3)$

Rpta. $8\sec^2(8x+3)$

9.- $f(x) = \ln(x^2+13)$

Rpta. $\frac{2x}{x^2+13}$

10.- $f(x) = \ln(x^5)$

Rpta. $5x^{-1}$

11.- $f(x) = 14^x$

Rpta. $14^x \ln 14$

12.- $f(x) = 5^x \cdot 4^x$

Rpta. $20^x \ln 20$

13.- $f(x) = e^x$

Rpta. e^x

En los siguientes ejercicios determina la derivada en el punto indicado:

14.- $f(x) = x^2 + 5x$ en $x = 1$

Rpta. 7

15.- $f(x) = x + \cos 2x$ en $x = \frac{\pi}{12}$

Rpta. 2

16.- $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ en $x = 3$

Rpta. 3

17.- $f(x) = 2^x$ en $x = 2$

Rpta. $4 \ln 2$

20.- $f(x) = \arcsen x$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Rpta. $\sqrt{2}$

Capítulo II

Derivadas laterales

Este capítulo presenta las derivadas laterales como la herramienta que mide la tasa de cambio de una función al acercarnos a un punto solo desde la derecha o solo desde la izquierda. Son esenciales en extremos de intervalo y en funciones definidas por tramos, donde la derivabilidad no puede evaluarse con un único acercamiento. Veremos que una función es derivable en un punto solo cuando ambas derivadas laterales existen y coinciden, y que la falta de coincidencia permite clasificar no derivabilidades típicas como esquinas, cúspides o tangentes verticales. También recordaremos que la derivabilidad implica continuidad, pero no al revés, con ejemplos canónicos que afinan el criterio. Con esta base, dispondrás de un diagnóstico preciso para estudiar el comportamiento local de las funciones y preparar el terreno para las reglas de derivación de los capítulos siguientes.

2.1. ¿Qué son las derivadas laterales?

La derivada lateral mide la tasa de cambio instantánea de una función cuando nos acercamos a un punto solo desde uno de sus lados. Si nos aproximamos a a con valores mayores que a , hablamos de derivada por la derecha; si lo hacemos con valores menores, de derivada por la izquierda.

La derivada existirá si derivada por la izquierda es igual a la derivada por la derecha.

Derivada por la derecha:

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivada por la izquierda:

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \exists \Leftrightarrow f'_+(x) = f'_-(x)$$

Por supuesto que:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + a) - f(a)}{h}$$
$$f'_+(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{f(x + a) - f(a)}{h}$$
$$f'_-(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \frac{f(x + a) - f(a)}{h}$$

Ejercicios de aplicación

Perita 1

Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ 1 - 2x & ; x \geq -1 \end{cases} : \text{en } x = -1$$

Solución:

Es muy sencillo comprobar que f es continua solo faltaría calcular las derivadas laterales.

Primero calcularemos derivada por la izquierda

Calculamos la derivada por la izquierda:

$$f(x) = x^2$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1$$

$$f'_-(-1) = -2$$

Calculamos la derivada por la derecha:

$$f(x) = 1 - 2x$$

$$f(-1) = 1 - 2(-1) = 3$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2(x + 1)}{x + 1}$$

$$f'_+(-1) = -2$$

Puesto que $f'_-(-1) = f'_+(-1) = -2$ la derivada es -2

Perita 2

Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & ; x < 1 \\ 2x^3 + 1 & ; x \geq 1 \end{cases} : \text{en } x = 1$$

Solución:

Es muy sencillo comprobar que f es continua solo faltaría calcular las derivadas laterales.

Primero calcularemos derivada por la izquierda

Calculamos la derivada por la izquierda:

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$f(1) = (1)^3 + 2(1) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 3)}{x - 1}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x + 3 = 1^2 + 1 + 3 = 5$$

Calculamos la derivada por la derecha:

$$f(x) = 2x^3 + 1$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 1 = 3$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1}$$

$$f'_+(1) = 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = 2(1 + 1 + 1)$$

$$f'_+(1) = 6$$

Puesto que $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ por lo que f' no existe.

Perita 3

Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5; & x \leq 3 \\ x^2 - 1; & x > 3 \end{cases} : \text{en } x = 3$$

Solución:

Es fácil notar que la función f no es continua, por lo cual no es derivable sin embargo aun así calcularemos las derivadas laterales

Calculamos la derivada por la izquierda:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(3) = 2(3) + 5 = 11$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 5 - 11}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x - 3)}{x - 3}$$

$$f'_-(3) = 2$$

Calculamos la derivada por la derecha:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = 3 + 3 = 6$$

$$f'_+(3) = 6$$

Puesto que $f'_-(3) \neq f'_+(3)$ por lo que f' no existe.



Teorema: De lo observado notaremos que toda función derivada es en esencia continua sin embargo toda función continua no es necesariamente derivable.

Perita 4

Determina las derivadas laterales

$$f(x) = |x^2 - 9|: \text{en } x = 3$$

Solución:

Recordemos que la función valor absoluto es continua en todo su dominio solo nos faltaría calcular las derivadas laterales.

Calculamos la derivada por la izquierda:

$$\begin{aligned} x < 3 &\Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \\ f(x) &= |x^2 - 9| = -(x^2 - 9) = 9 - x^2 \\ f(3) &= 9 - (3)^2 = 0 \\ f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - x^2 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3+x)(3-x)}{x-3} \\ f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -(3+x) = -6 \end{aligned}$$

Calculamos la derivada por la derecha:

$$\begin{aligned} x > 3 &\Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x^2 - 9 > 0 \\ f(x) &= |x^2 - 9| = x^2 - 9 \\ f(3) &= (3)^2 - 9 = 0 \\ f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3+x)(x-3)}{x-3} \\ f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 3 = 3 + 3 = 6 \\ f'_+(3) &= 6 \end{aligned}$$

Puesto que $f'_-(3) \neq f'_+(3)$ por lo que f' no existe.

Perita 5

Determina el valor de k para que la función sea derivable.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & ; x \leq 1 \\ k(x-1) & ; x > 1 \end{cases} : \text{en } x = 3$$

Solución:

Para la solución de este ejercicio primero probaremos la continuidad.

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

Los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x &= \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x-1) &= k(1-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

Donde concluimos que es continua

Ahora procederemos a calcular la derivada

Calculamos la derivada por la izquierda $x < 1$.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x - 0}{x - 1} \Rightarrow x = 1 + h \therefore h = x - 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \ln(1 + h) = \ln e = 1$$

Calculamos la derivada por la derecha.

$$f(x) = k(x - 1) \Rightarrow f(1) = k(1 - 1) = 0$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} k$$

$$f'_+(1) = k$$

Para que la derivada exista $f'_-(1) = f'_+(1)$

Donde $1 = k$ Rpta.

2.2. Análisis de la derivabilidad de las funciones

En los ejercicios anteriores solo calculamos las derivadas laterales sin importarnos el significado; sin embargo, en este tema le daremos un significado a los resultados que obtuvimos podría decirse que más geométrico.

Perita 6

Analizar la derivabilidad de la función:

$$g(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & ; \text{ si } x < 1 \\ 3x^2 & ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Notamos de inmediato que la función “ $g(x)$ ” es continua

Procederemos a estudiar las derivadas laterales en el punto $x = 1$

Por la izquierda $x < 1$

$$g(x) = 2x^3 + 1 \Rightarrow g(1) = 3$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1}$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x^2 + x + 1) = 6$$

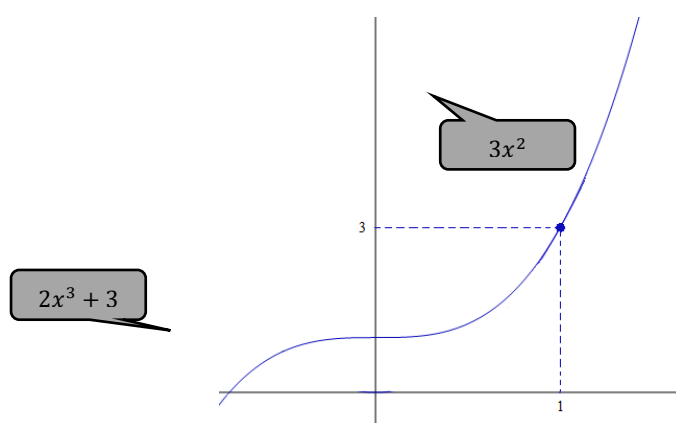
Por la derecha $x > 1$

$$g(x) = 3x^2 \Rightarrow g(1) = 3$$

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x + 1) = 6$$

$$\text{Puesto que } g'_-(1) = g'_+(1) \Rightarrow g'(1) = 6$$



Como veras la derivada se da en funciones de grafico continuo, que tiene un cambio suave

Perita 7

Analizar la derivabilidad de la función:

$$g(x) = |x - 3| + 1$$

Solución:

Notamos de inmediato que la función “ $g(x)$ ” es continua, sin embargo, el punto $x = 3$ llama bastante la atención (siendo $|u(x)|$ se tendrá cuidado los puntos donde $u(x) = 0$).

Primero redefinimos el valor absoluto en el entorno 3.

$$x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0$$

$$g(x) = |x - 3| + 1 = -(x - 3) + 1 = 4 - x$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x - 3 \geq 0$$

$$g(x) = |x - 3| + 1 = (x - 3) + 1 = x - 2$$

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x; & x < 3 \\ x - 2; & x \geq 3 \end{cases}$$

Procederemos a estudiar las derivadas laterales en el punto $x = 3$

Por la izquierda $x < 3$

$$g(x) = 4 - x \Rightarrow g(3) = 1$$

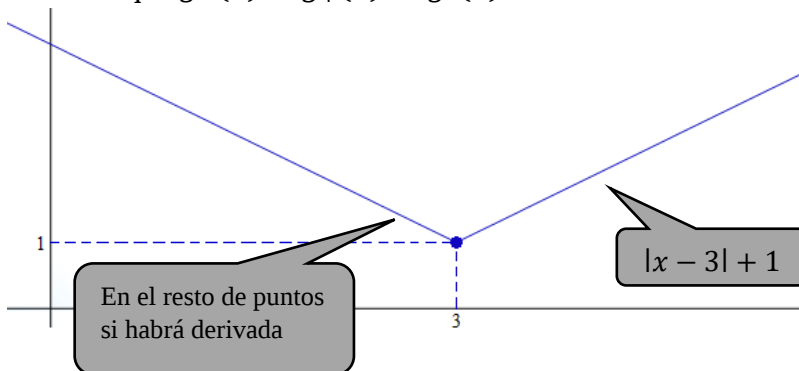
$$g'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 - x - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{x - 3} = -1$$

Por la derecha $x > 3$

$$g(x) = x - 2 \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

Puesto que $g'_-(3) \neq g'_+(3) \Rightarrow g'(3) = \nexists$



La derivada no existe en los picos o en los cambios abruptos por ende esta función tendrá derivada en todos los puntos excepto en sus picos.

Perita 8

Analizar la derivabilidad de la función:

$$g(x) = \sqrt[3]{2x-1} + 2$$

En $x = 1/2$

Solución:

Notamos de inmediato que la función “ $g(x)$ ” es continua.

Procederemos a estudiar las derivadas laterales en el punto $x = 1/2$

Por la izquierda $x < \frac{1}{2}$

$$g(x) = \sqrt[3]{2x-1} + 2 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$g'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + 2 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$g'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2\sqrt[3]{2x-1}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2}{(2x-1)^{2/3}} = +\infty$$

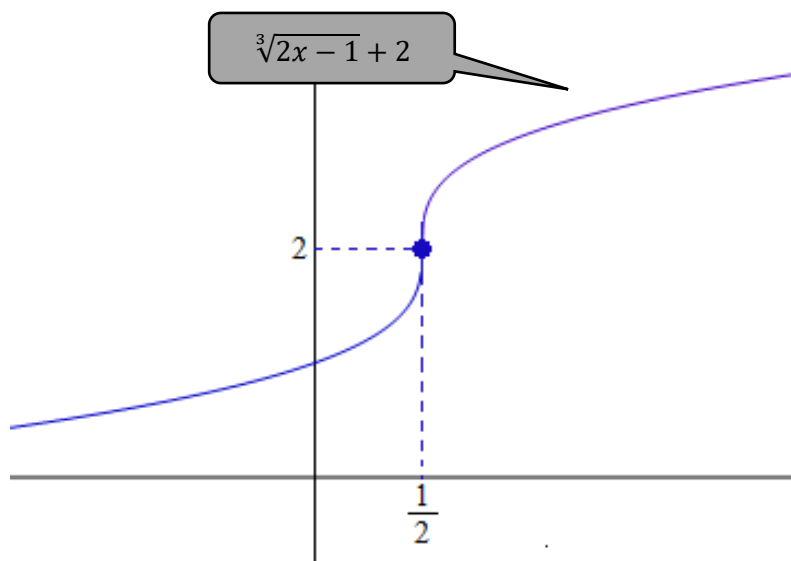
Por la derecha $x > \frac{1}{2}$

$$g(x) = \sqrt[3]{2x-1} + 2 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$g'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + 2 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$g'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2\sqrt[3]{2x-1}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2}{(2x-1)^{2/3}} = +\infty$$

Puesto que $g'_-\left(\frac{1}{2}\right) = g'_+\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty \Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = \text{no existe}$



La derivada no existe en los puntos donde la curva se asemeja a una recta vertical.

Perita 9

Analizar la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5; & x \leq -1 \\ 1 - x^2; & x > -1 \end{cases} : \text{en } x = -1$$

Es fácil notar que la función f no es continua.

Calculamos la derivada por la izquierda.

$$f(x) = 3x + 5 \Rightarrow f(-1) = 2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 5 - 2}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3(x + 1)}{x + 1} = 3$$

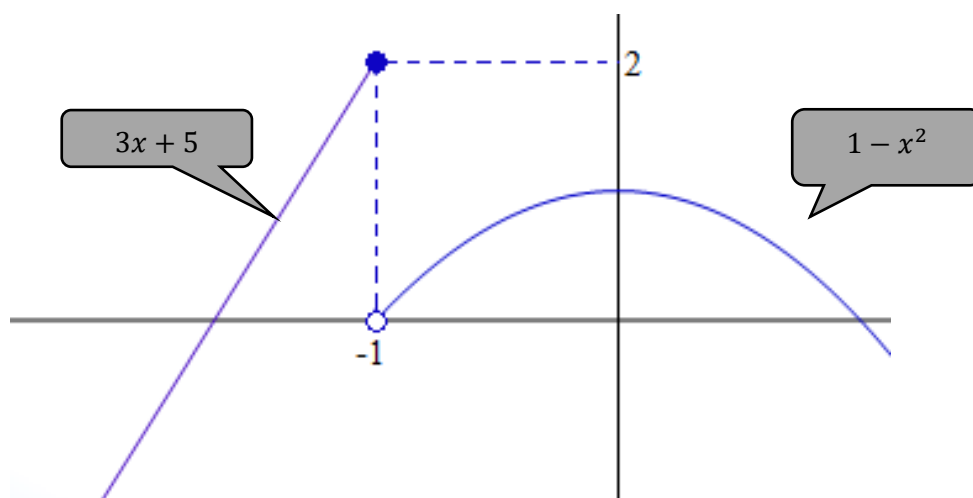
Calculamos la derivada por la derecha.

$$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - x^2 - 0}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - x^2}{x + 1}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - x = 2 = 6$$

Puesto que $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ por lo que f' no existe.



Como habrás notado la derivada no existe en los puntos de discontinuidad; recapitulando no hay derivada si hay cambios bruscos (una esquina, pico, garrita, etc) tampoco si la derivada es cercana a un punto que está en una recta vertical y por supuesto que si la función no es continua no hay derivada; Inclusive se enuncio un teorema: La derivada implica continuidad su reciproco no siempre se cumple.

Perita 10

Determina las derivadas laterales:

$$f(x) = \sqrt{|x| + \llbracket x \rrbracket}; \text{ en } x = 2$$

Solución:

Como sabemos la función máximo entero es periódica segmentada y tiene puntos de discontinuidad por ende para el desarrollo de la derivada tomaremos intervalos.

Calculamos la derivada por la izquierda $[1; 2)$.

Si $x \in [1; 2) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1 \quad \wedge \quad |x| = x$ por lo tanto;

$$f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow f(2) = \sqrt{3}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Calculamos la derivada por la derecha $[2; 3)$.

Si $x \in [2; 3) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 2 \quad \wedge \quad |x| = x$ por lo tanto;

$$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}$$

Puesto que $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ por lo que $f'(2)$ no existe.

Ejercicios de aplicación

1. Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x < 2 \\ 3x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases} : \text{en } x = 2$$

Rpta. No

2. Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-4)^3 + \frac{4}{3} & ; 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x)^2 - 2 & ; x > 3 \end{cases} : \text{en } x = 3$$

Rpta. Si

3. Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \begin{cases} 3x & ; x \leq 1 \\ x^3 + 1 & ; x > 1 \end{cases} : \text{en } x = 1$$

Rpta. Si

4. Determina las derivadas laterales

$$f(x) = |x^2 - 16| : \text{en } x = 4$$

Rpta. no existe

5. Determina el valor de a y b para que la función sea derivable.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; x \leq 1 \\ ax + b & ; x > 1 \end{cases} : \text{en } x = 1$$

6. Analizar la derivabilidad de la función:

$$g(x) = \sqrt{(x+5)^2 + 1} \text{ sug } \sqrt{x^2} = |x|$$

7. Analizar la derivabilidad de la función

$$g(x) = \sqrt[3]{x-1} + x$$

En $x = 1$

8. Determina las derivadas laterales

$$f(x) = \sqrt{|x| + \llbracket x \rrbracket} : \text{en } x = 2/3$$

Capítulo III

Cálculo de derivadas con fórmulas básicas

Este capítulo traduce la idea de derivada en un repertorio operativo de reglas que permiten calcular con rapidez y precisión. Se presentan la derivada de una constante, la regla de la potencia para potencias y raíces, y las derivadas de las funciones trigonométricas elementales, cuidando siempre las condiciones de dominio y los casos límite. Los ejemplos resueltos muestran cómo aplicar estas fórmulas en polinomios y expresiones sencillas, mientras que los ejercicios propuestos consolidan la destreza y ayudan a evitar errores frecuentes. Con estas herramientas, el lector estará listo para combinar términos mediante las reglas de suma, producto y cociente del capítulo siguiente.

3.1. Derivada de un número o una constante

$$y = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

Donde “*c es un numero*”

Usando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c) - c}{h} = 0 \quad \therefore \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos aplicados:

$$y = 80 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = 200 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = 30^{13} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \pi^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = 3e^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \operatorname{sen}(30^\circ) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \cos(300^\circ) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \operatorname{tg}(\pi) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \ln(98) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \log 32 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \log_4 256 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \sum_{i=3}^{100} i \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \prod_{i=3}^{25} i \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$



Hay un caso especial donde: $\frac{d}{dx}t = 0$, $\frac{d}{dz}x = 0$, etc.

¿Por qué en los dos casos anteriores la derivada resultó 0? La respuesta para la 1era es si no nos dan información acerca de la letra se le considera un número en la 2da la derivada se está realizando con respecto a z por ende el "x" será un número.

3.2. Derivada de potencias y raíces

Caso I. Derivada de una potencia:

Cuando $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Usando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Ahora aplicamos el binomio de newton

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + C_n^n h^n - x^n}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + C_n^n h^n}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} C_1^n x^{n-1} + C_2^n x^{n-2}h + \dots + C_n^n h^{n-1} = nx^{n-1}$$

Ejemplos aplicados:

$$y = x^5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y = \pi x^8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8\pi x^7$$

$$y = x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$$* y = 8x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8$$

$$* y = -15x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -15$$

$$y = x^2 \sum_{i=3}^{100} i \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \sum_{i=3}^{100} i$$

*Si es solo la variable “kx” la derivada será “k”

Caso II. Derivada de una potencia:

Cuando $n \in \mathbb{Z}^-$

$$y = x^{-n} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Usando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{h(x+h)^n x^n}$$

Ahora aplicamos el binomio de newton

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n - (x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + C_n^n h^n)}{h(x+h)^n x^n}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(C_1^n x^{n-1} h + C_2^n x^{n-2} h^2 + \dots + C_n^n h^n)}{h(x+h)^n x^n}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(C_1^n x^{n-1} + C_2^n x^{n-2} h + \dots + C_n^n h^{n-1})}{(x+h)^n x^n} = \frac{-C_1^n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Ejemplos aplicados:

$$y = x^{-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -5x^{-6}$$

$$y = x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$$

$$y = 2x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -6x^{-4}$$

$$y = x^{-8} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8\pi x^{-7}$$

$$y = x^{-10} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-10}{x^{11}}$$

$$y = x^{-15} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-15}{x^{16}}$$

$$y = -x^{-20} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{20}{x^{21}}$$

$$y = x^{-45} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-45}{x^{44}}$$



En la columna izquierda la derivada está expresada en forma lineal mientras que en la columna derecha está expresada en su forma final; antes de seguir observa:

$$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = x^{-3} \text{ derivamos } y' = -3x^{-4} \Rightarrow y' = \frac{-3}{x^4}$$

Caso III. Derivada de una raíz:

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Usando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}$$

Ahora aplicamos el binomio de newton

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} \cdot \frac{FR}{FR}; \text{ FR es Factor racionalizante}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(FR)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(FR)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{FR}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{(x+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{(x+h)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{x^{n-2}} \sqrt[n]{x+h} + \sqrt[n]{x^{n-1}}}_{\text{"n" terminos}}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$$

Caso IV. Cuando $n \in \mathbb{Q}$ más específico cuando es una fracción

$$y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y = 4x^{\frac{7}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7x^{3/4}$$

$$y = \sqrt{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}$$

$$y = \frac{9}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^4}}$$

¿Cómo sacar la derivada de una forma veloz?

$$y = \sqrt[3]{x^4} \Rightarrow y = x^{\frac{4}{3}}$$

La resta en la derivada de raíces se hace siguiendo la flecha y poniendo el mismo denominador

$$4 - 3 = \textcircled{1}$$

Derivamos

$$y' = \left(\frac{4}{3}\right) x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$$

Caso V. Cuando $n \in \mathbb{I}$ también se considera a los números trascendentales como e, ϕ, π, τ , etc.

$$y = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$$

$$y = x^e \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e x^{e-1}$$

$$y = \tau \sqrt{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\tau} x^{\frac{3-\tau}{\tau}}$$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{x^{\pi-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-\pi)}{x^{\pi}}$$

En general la derivada de

$$f(x) = x^n$$

$$\frac{d}{dy} f(x) = nx^{n-1}$$

Practique estos cinco casos ya que el resto de fórmulas para derivar usan polinomios en sus ángulos “razones trigonométricas” o como exponentes para funciones exponenciales entre otros.

Derivada de la expresión:

$$y = kx^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nkx^{n-1}$$

Usando la definición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h)^n - kx^n}{h}$$

Ahora aplicamos el binomio de newton

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + C_n^n h^n - x^n]}{h}$$

$$k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_1^n x^{n-1} h + C_2^n x^{n-2} h^2 + \dots + C_n^n h^n}{h}$$

$$k \lim_{h \rightarrow 0} C_1^n x^{n-1} + C_2^n x^{n-2} h + \dots + C_n^n h^{n-1} = knx^{n-1}$$

Ejemplos de aplicación:

Cuando $n \in \mathbb{R}$.

$$y = 4x^5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$y = -3x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x^{-3}$$

$$y = 7x^{-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -35x^{-6}$$

$$y = \pi x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4\pi x^3$$

$$y = tx^{-4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -4tx^{-5}$$

$$y = x \prod_{i=3}^{25} i^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \prod_{i=3}^{25} i^2$$

$$y = x^2 \sum_{i=3}^{100} i \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \sum_{i=3}^{100} i$$



De aquí se concluirá una propiedad aún más importante; la cual consiste en que si un número multiplica a una función al momento de realizar la derivada podemos prescindir de ella es decir derivamos la función sin el número y al terminar le volvemos a multiplicar el número.

3.3. Derivadas de expresiones trigonométricas

Derivar la función trigonométrica:

$$y = \text{sen}(x) \Rightarrow y' = \text{cos}(x)$$

Usando la definición:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(h) + \text{sen}(h) \cos(x) - \text{sen}(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\text{sen}(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(x) \frac{1 - \cos(h)}{h}$$
$$y' = \cos(x) \cdot 1 - \text{sen}(x) \cdot 0 = \cos(x)$$

También se concluirá:

$$y = \text{sen}(u) \Rightarrow y' = \cos(u) u'$$

Ejercicios de aplicación

Derivar la función trigonométrica:

$$y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}(x)$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\ y' &= -\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{1 - \cos(h)}{h} \\ y' &= -\operatorname{sen}(x) \cdot 1 - \cos(x) \cdot 0 = -\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

También se concluirá:

$$y = \cos(u) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}(u) u'$$

Derivar la función trigonométrica:

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \sec^2(x)$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg}(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h} - \operatorname{tg}(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h - \operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}^2(x) \cdot \operatorname{tg}(h)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h}}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(h)[1 + \operatorname{tg}^2(x)]}{h(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h)} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\sec^2 x]}{(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h)} = \frac{\sec^2 x}{1 - 0} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Derivar la función trigonométrica:

$$y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csc}^2(x)$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x+h) - \operatorname{ctg}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}(x+h)} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(x+h)}{h \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h}}{h \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+h)} \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{tg\ x - tg\ h - tg(x) - tg^2(x) \cdot tg(h)}{h(1 - tg\ x \cdot tg\ h)tg\ x tg(tg\ x + h)}$$

$$y' = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{tg\ h}{h} \cdot \frac{[1 + tg^2(x)]}{(1 - tg\ x \cdot tg\ h)} \cdot \frac{1}{tg\ x tg(tg\ x + h)}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-[sec^2(x)]}{tg^2 x} = -csc^2(x)$$

Derivar la función trigonométrica:

$$y = sec\ x \Rightarrow y' = sec(x) tg(x)$$

Usando la definición:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{sec(x+h) - sec(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{cos(x+h)} - \frac{1}{cos\ x}}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cos\ x - cos(x+h)}{h cos\ x cos(x+h)} \text{ Donde la expresion será}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{sen(x) sen(h)}{h cos\ x cos(x+h)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cos(x)[1 - cos(h)]}{cos\ x cos(x+h)h}$$

$$y' = \frac{1}{cos\ x} \cdot \frac{sen\ x}{cos\ x} = sec\ x tg\ x$$

De la misma forma se hace con la cosecante.

$$y = csc\ x \Rightarrow y' = -csc(x) ctg(x)$$

Capítulo IV

Algebra de derivadas

En este capítulo se sistematiza cómo “opera” la derivación al combinar funciones. Partimos de la linealidad (sumas, restas y constantes) y avanzamos hacia las reglas del producto y del cociente, precisando sus condiciones de validez y el papel del dominio en puntos problemáticos. Con ejemplos breves se muestra cómo estas reglas permiten derivar polinomios, funciones racionales y expresiones mixtas con trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, evitando errores típicos como derivar término a término en productos o ignorar denominadores. La meta es dotar al lector de un método claro y eficiente para descomponer expresiones y reconstruir sus derivadas, preparando el terreno para la Regla de la Cadena del capítulo siguiente.

4.1. Regla de la suma y la resta

$$y = u(x) \pm v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \pm v'(x)$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \pm v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) \pm v(x+h) - v(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ y' &= u'(x) \pm v'(x) \end{aligned}$$

La demostración empleada es válida para cualquier función.

Se puede afirmar con toda certeza que la derivada se distribuye a todas las componentes de la expresión.

Ejemplos aplicados:

Determine la derivada de la función.

$$y = x^5 + 3x^2 - 5x - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 + 3x^2 - 5x - 10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}3x^2 - \frac{d}{dx}5x - \frac{d}{dx}10$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 6x - 5 - 0$$

$$y' = 5x^4 + 6x - 5$$

Observe como la derivada se distribuye a cada uno de los sumandos.

Para reducir el procedimiento usamos la notación de Newton.

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Determine la derivada de las funciones dadas:

$$1.- y = 3x^4 + 2x^2 - x$$

$$y' = 12x^3 + 4x - 1$$

2.- $y = (x^4 + 2)^2$ esta pregunta pertenece a regla de la cadena sin embargo con algebra básica podemos resolverlo

$$y = x^8 + 4x^4 + 4 \text{ Primero desarrollamos el binomio}$$

$$y' = 8x^7 + 16x^3$$

$$3.- y = \sqrt{x} + 2x$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$$

$$4.- y = (\sqrt[3]{x^2} - x)^3$$

$$y = x^2 - 3x(\sqrt[3]{x^2})^2 + 3x^3\sqrt[3]{x^2} - x^3$$

$$y = x^2 - 3x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{7}{3}} - x^3 = x^2 - 3x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{7}{3}} - x^3$$

$$y' = 2x - 7x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^2$$

$$5.- y = \sin x + 4\cos x - x^3$$

$$y' = \cos x - 4\sin x - 3x^2$$

$$6.- y = \ln x - e^x - x^{10}$$

$$y' = \frac{1}{x} - e^x - 10x^9$$

En la pregunta 4 tenga cuidado al desarrollar el binomio; notara lo complicado que sería si el exponente fuese mayor de 5.

Excelente usted ya sabe desarrollar la derivada de una función que contiene sumas y restas; ahora lo que sigue es desarrollar la derivada de funciones que tienen la multiplicación.

4.2. Regla del producto

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Usando la definición:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-u(x)v(x) + u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) + \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

El procedimiento es sencillo:

- 1.- Copiar la función 2 veces.
 - 2.- La operación entre ellas es la suma.
 - 3.- Derivar el primer factor en el primer sumando y derivar el segundo factor en el segundo sumando
- Como habrás notado es muy sencillo de recordar

Ejemplos de aplicación:

1. Encuentre la derivada de: $y = x^2 \text{sen} x$

Solución:

$$y' = x^2 \text{sen} x + x^2 \text{sen} x$$

$$y' = x^2 \text{sen} x + x^2 \text{sen} x$$

$$y' = (x^2)'(\text{sen} x) + (x^2)(\text{sen} x)'$$

$$y' = 2x(\text{sen} x) + (x^2)\text{cos} x$$

$$y' = x[2\text{sen} x + x\text{cos} x]$$

Con la practica serás capaz de realizar la derivada de una forma simultánea.

2. Encuentre la derivada de: $y = \ln x \cdot e^x$

Solución:

$$y' = \ln x \cdot e^x + \ln x \cdot e^x$$

$$y' = \ln x \cdot e^x + \ln x \cdot e^x$$

$$y' = (\ln x)'(e^x) + (\ln x)(e^x)'$$

$$y' = \frac{1}{x}(e^x) + \ln x \cdot e^x$$

En la derivada del producto las expresiones se suman porque el producto es una suma abreviada.

3. Determine la derivada de las funciones

- 1.- $y = 5x^{\frac{5}{3}} - 3x^2 + 2^x \text{sen} x$

Derivada del producto

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} - 6x + \overbrace{(2^x)' \text{sen} x + 2^x (\text{sen} x)'}^{\text{Derivada del producto}}$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} - 6x + 2^x \ln 2 \text{sen} x + 2^x \text{cos} x$$

- 2.- $y = x^2 e^x \text{cos} x$

$$y' = (x^2)'e^x \text{cos} x + x^2 (e^x)' \text{cos} x + x^2 e^x (\text{cos} x)'$$

$$y' = 2x e^x \text{cos} x + x^2 e^x \text{cos} x + x^2 e^x (-\text{sen} x)$$

$$y' = x e^x (2\text{cos} x + x\text{cos} x - x\text{sen} x)$$

En la última pregunta se realizó la derivada de un producto de 3 factores, como notara se copió 3 veces la función y se derivó por orden cada factor de los sumandos. Ahora nos toca revisar una derivada muy importante para la operación de la división.

4.3. Regla de la recíproca

$$y = \frac{1}{u(x)} \Rightarrow y' = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x) - u(x+h)}{u(x+h)u(x)}}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x) - u(x+h)}{h}}{u(x+h)u(x)} \\ y' &= \frac{-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} u(x+h)u(x)} \\ y' &= \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2} \end{aligned}$$

Ejemplos de aplicación:

1. Encuentre la derivada de: $y = \sec(x)$

Solución:

Por identidad recíproca tenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\cos x} \\ y' &= \frac{-(\cos x)'}{(\cos x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Dándole una forma más adecuada

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \operatorname{tg} x \sec x$$

2. Encuentre la derivada de:

$$y = \frac{1}{x^3 + 4}$$

Solución:

$$y' = \frac{(x^3 + 4)'}{(x^3 + 4)^2} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{(x^3 + 4)^2}$$

Una introducción a la derivada por regla de la cadena o funciones compuestas.

4.4. Regla de la derivada de la división

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Usando la definición:

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - v(x+h)u(x)}{v(x+h)v(x)}}{h} \\
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - v(x+h)u(x)}{h v(x+h)v(x)} \\
 y' &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h)v(x)} \\
 y' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}
 \end{aligned}$$

Otra demostración importante es usando la regla del producto y es aquí que usaremos la regla del inverso multiplicativo.

$$\begin{aligned}
 y &= [u(x)] \left[\frac{1}{v(x)} \right] \\
 y' &= [u(x)]' \left[\frac{1}{v(x)} \right] + [u(x)] \left[\frac{1}{v(x)} \right]' \\
 y' &= \frac{u'(x)}{v(x)} + [u(x)] \cdot \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 y' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}
 \end{aligned}$$

De manera similar emplearemos esta fórmula para otras demostraciones.

El proceso se resumiría en:

- 1.- Copiar el numerador y el denominador 2 veces.
- 2.- La operación entre ellas es la sustracción.
- 3.- Derivar el primer factor en el minuendo y derivar el segundo factor en el sustraendo.
- 4.- Dividir todo por el cuadrado del denominador.

Ejemplos de aplicación:

1. Encuentre la derivada de: $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y' &= \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x \\
 y' &= \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x \\
 y' &= [\operatorname{sen} x]' \cos x - \operatorname{sen} x [\cos x]' \\
 y' &= \frac{[\operatorname{sen} x]' \cos x - \operatorname{sen} x [\cos x]'}{[\cos x]^2} \\
 y' &= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{[\cos x]^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{[\cos x]^2} \\
 y' &= \frac{1}{[\cos x]^2} = \sec^2 x
 \end{aligned}$$

2. Encuentre la derivada de:

$$y = \frac{x^2 + 3x - 4}{\operatorname{sen} x}$$

Solución:

$$y' = \frac{(x^2 + 3x - 4)'(\operatorname{sen} x) - (x^2 + 3x - 4)(\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$y' = \frac{(2x + 3)(\operatorname{sen} x) - (x^2 + 3x - 4)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

3. Encuentre la derivada de:

$$y = \frac{x^3 + 13x - 14}{x^4 + 3x^2 - 4x}$$

Para $x = 1$

Solución:

$$y' = \frac{(x^3 + 13x - 14)'(x^4 + 3x^2 - 4x) - (x^3 + 13x - 14)(x^4 + 3x^2 - 4x)'}{(x^4 + 3x^2 - 4x)^2}$$

$$y' = \frac{(3x^2 + 13)(x^4 + 3x^2 - 4x) - (x^3 + 13x - 14)(4x^3 + 6x - 4)}{(x^4 + 3x^2 - 4x)^2}$$

Para $x = 1$

$$y' = \frac{(3 + 13)(1 + 3 - 4) - (1 + 13 - 14)(3 + 6 - 4)}{(1 + 3 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{(14)(-1) - (-10)(4)}{(-1)^2} = 27$$



Las demostraciones presentadas en este capítulo se basan en la regla de la cadena. No se profundizó en su complejidad, pues el propósito fue estrictamente didáctico. Se recomienda repasar la teoría y resolver los ejercicios antes de continuar. Por último, se abordará un caso de derivación particularmente singular.

4.5. Derivaciones inversas

Si una función $y = f(x)$ admite inversa $f^* = x = g(y)$

De forma geométrica se dice que las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes inversas en los puntos (a, b) y (b, a) donde:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ y } \frac{dx}{dy} = f'(y)$$

Luego obtendremos como formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \Rightarrow Df^*(y) = \frac{1}{Df(x)} = \frac{1}{Df(f^*(y))}$$

Ejercicios de aplicación

Platanito 1

Sea $f(s) = 2 - 3s + s^4$

Determine la derivada de f^{-1}

$$f'(s) = -3 + 4s^3$$

$$(f^{-1}(s))' = \frac{1}{-3 + 4s^3}$$

Platanito 2

Sea $x = e^{\arccos y}$

Hallar la expresión para dy/dx mediante y , mediante x
Mediante y :

$$\frac{dx}{dy} = e^{\arccos y} (\arccos y)' = e^{\arccos y} \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-e^{\arccos y}}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{-e^{\arccos y}}{\sqrt{1-y^2}}} = \frac{-\sqrt{1-y^2}}{e^{\arccos y}}$$

Mediante x , tendremos que tomar el logaritmo:

$$\ln x = \arccos y \Rightarrow y = \cos(\ln x)$$

$$y' = -\sin(\ln x) \cdot (\ln x)' \Rightarrow y' = \frac{-\sin(\ln x)}{x}$$

Capítulo V

Regla de la cadena

La regla de la cadena es el puente para derivar funciones compuestas, esas en las que “una función vive dentro de otra”. Su idea central es descomponer la expresión en capas, externa e interna y propagar la variación respetando el orden de composición. Aquí aprenderás a aplicarla con soltura en casos típicos: potencias de funciones, exponenciales y logaritmos de expresiones, y trigonométricas de polinomios o racionales; además, se señalan errores frecuentes (confundir el orden o “olvidar” la parte interna) y se enfatiza el papel del dominio. Con esta herramienta, la diferenciación se vuelve sistemática y prepara el terreno para la derivación implícita, paramétrica y logarítmica de los capítulos siguientes.

5.1. Teorema y demostración básica

Sean $y = f(x)$, $z = z(y)$ dos funciones donde se cumple:

- 1.- $y = f(x)$ es derivable en el punto a , y .
- 2.- $z(y)$ es derivable en el punto $y(a)$.

Entonces la función compuesta $z(y(x))$ también denominada como $(z \circ y)(x)$ es diferenciable en el punto a y se cumple:

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(y(a)) \cdot \frac{dy}{dx}(a)$$

A esta fórmula se le suele expresar de otras formas:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{ésta es la fórmula más usada}$$

$$D_x(z(y)) = D_y z \cdot D_x y$$

Para una función $y = a(b(c(x)))$ la derivada será

$$y' = a'(b(c(x))) \cdot b'(c(x)) \cdot c'(x)$$

Si fuese más funciones compuestas la derivada se realizará de afuera hacia adentro pasando por cada función.

Ejemplos de aplicación:

1. Encuentre la derivada de $y = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

Solución:

Sea $y = \sqrt{u}$; $u = x^2 + 3x + 5$ y sus derivadas

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} ; \quad \frac{du}{dx} = 2x + 3 \text{ reemplazamos}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 3) \Rightarrow y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$$

5.2. Derivada de una función elevada a un exponente

$$y = [u(x)]^n \Rightarrow y' = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

En esta demostración consideraremos que “ n ” es un entero positivo:

$y = [u(x)]^n = u^{n-1}(x) \cdot u(x)$ usaremos regla del producto

$$y' = [u^{n-1}(x)]' \cdot u(x) + u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$$

$$y' = (n-1)u^{n-2}(x)u'(x) \cdot u(x) + u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$$

$$y' = (n-1)u^{n-1}(x)u'(x) + u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$$

$$y' = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Bajamos el exponente cualquiera que este sea.
2. Restamos “1” al exponente original.
3. El interior de la función, es decir nuestra $u(x)$ permanece igual y se reescribe.
4. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejercicios de aplicación

Manzanita 1

Calcular la derivada de: $f(x) = (5x^2 + 3)^2$

Solución: Esta pregunta la realizaremos por 2 métodos.

Método 1

Se basa en desarrollar el binomio que en este caso no es complicado.

$$f(x) = (5x^2 + 3)^2 = 25x^4 + 30x^2 + 9$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 100x^3 + 60x$$



Sencillo verdad, sin embargo, se vuelve aburrido si el exponente fuese 4 y obsoleto si el exponente es mayor e inaplicable si el exponente fuese una raíz, a parte también sería complicado si la expresión $u(x)$ tuviese más términos.

Método 2

Este método es usando regla de la cadena y seguiremos los pasos descritos.

$$f(x) = (5x^2 + 3)^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = 2[u(x)]^{2-1} \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$u(x) = 5x^2 + 3$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = u'(x) = 10x$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2(5x^2 + 3) \cdot (10x)$$

Pues ahora dirás que los resultados son distintos solo me quedaría escribir:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2(5x^2 + 3) \cdot (10x) = (5x^2 + 3) \cdot (20x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 100x^3 + 60x$$

Todo el interior
es $u(x)$

Multiplicar por
la derivada de u
con respecto a x

Manzanita 2

Calcular la derivada de: $f(x) = (2x^3 - 5x)^{999}$

Solución**Método 1.**

El desarrollo es muy aburrido yo me rindo gg.

Método 2.

$$f(x) = (2x^3 - 5x)^{999}$$

$$u(x) = 2x^3 - 5x$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = u'(x) = 6x^2 - 5$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 999(2x^3 - 5x)^{998} \cdot (6x^2 - 5)$$

Por supuesto que aquí no hare el desarrollo la respuesta se quedara así.

Manzanita 3

Calcular la derivada de: $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 2x^3}$

Solución: primero expresarlo en exponente

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 2x^3} = (x^5 + 2x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$u(x) = x^5 + 2x^3$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = u'(x) = 5x^4 + 6x^2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{3}(x^5 + 2x^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (5x^4 + 6x^2)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{3}(x^5 + 2x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (5x^4 + 6x^2)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{5x^4 + 6x^2}{3(x^5 + 2x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{5x^4 + 6x^2}{3\sqrt[3]{(x^5 + 2x^3)^2}}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

Calcular la derivada de: $f(x) = \sqrt[5]{(3x^3 + 2)^3}$

Solución:

$$f(x) = \sqrt[5]{(3x^3 + 2)^3} = (3x^3 + 2)^{\frac{3}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{5}(3x^3 + 2)^{\frac{3}{5}-1} \cdot (3x^3 + 2)'$$

$$f'(x) = \frac{3}{5}(3x^3 + 2)^{-\frac{2}{5}} \cdot (27x^2)$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot 27x^2}{5(3x^3 + 2)^{\frac{2}{5}}} = \frac{81x^2}{5\sqrt[5]{(3x^3 + 2)^2}}$$

Recuerda que este símbolo representa derivada de la expresión.

Observación: Para disminuir operaciones se usa esta forma.

Si hay algo que aprender son de los horrores que se cometen aquí 2 ejemplos clásicos:

- Olvidar multiplicar el $\frac{du}{dx}$.
 $f(x) = (x^5 + 2)^3 \rightarrow f'(x) = 3(x^5 + 2)^2$
Incorrecto
 $f(x) = (x^5 + 2)^3 \rightarrow f'(x) = 3(x^5 + 2)^2(5x^4)$
Correcto
- Cambiar el $\frac{du}{dx}$ con la u
 $f(x) = (7x^4 - 1)^3 \rightarrow f'(x) = 3(28x^3)^2$
Incorrecto
 $f(x) = (7x^4 - 1)^3 \rightarrow f'(x) = 3(7x^4 - 1)^2(28x^3)$
Correcto

5.3. Derivada de una función exponencial con base e

$$y = e^{u(x)} \Rightarrow y' = e^{u(x)} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Reescribir la función sin cambiar nada.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación

1. Calcular la derivada de: $f(x) = e^{2x^3+10}$

Solución:

$$f(x) = e^{2x^3+10} \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = e^{u(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$u(x) = 2x^3 + 10$
 $\frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = 6x^2$
 $\frac{d}{dx} f(x) = e^{2x^3+10} \cdot (6x^2)$

Diagrama de anotaciones:

- Una flecha apunta desde el exponente $2x^3+10$ en la primera ecuación hacia $u(x) = 2x^3 + 10$.
- Una flecha apunta desde el $\frac{d}{dx}$ en la segunda ecuación hacia $\frac{d}{dx} u(x)$.
- Una flecha apunta desde el $\frac{d}{dx}$ en la tercera ecuación hacia $\frac{d}{dx} f(x)$.
- Una flecha apunta desde el $\frac{d}{dx}$ en la cuarta ecuación hacia $\frac{d}{dx} f(x)$.

Notas en recuadros:

- Todo el exponente es $u(x)$
- Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

2. Calcular la derivada de: $f(x) = 2\sqrt{e^{\sin x}}$

Solución:

$$f(x) = 2\sqrt{e^{\sin x}} = 2e^{\frac{\sin x}{2}}$$

$$u(x) = \frac{\sin x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = \frac{\cos x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2e^{\frac{\sin x}{2}} \cdot \left(\frac{\cos x}{2}\right) = e^{\frac{\sin x}{2}} \cos x$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

3. Calcular la derivada de: $f(x) = e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}}$

Solución:

$$f(x) = e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}} = e^{(7x+2)^{\frac{2}{5}}}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}} \cdot \left[(7x+2)^{\frac{2}{5}} \right]'$$

$$f'(x) = e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}} \cdot \frac{2}{5} (7x+2)^{\frac{-3}{5}} (7x+2)'$$

$$f'(x) = e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}} \cdot \frac{2}{5(7x+2)^{\frac{3}{5}}} (7) = \frac{14e^{\sqrt[5]{(7x+2)^2}}}{5\sqrt[5]{(7x+2)^3}}$$

Recuerda que este símbolo representa derivada de la expresión



¿Es importante la conversión de unidades? La respuesta es, sin duda, ¡sí! En 1999, el satélite Mars Climate Orbiter, con un costo de 125 millones de dólares, estudiaba la atmósfera marciana. En setiembre, durante una aproximación a la superficie, se perdió todo contacto con la Tierra y nunca se recuperó. ¿Qué ocurrió? Las investigaciones concluyeron que la falla se debió a un error en la conversión de unidades.

5.4. Derivada de una función exponencial con base “>1”

$$y = a^{u(x)} \Rightarrow y' = a^{u(x)} \ln a \, u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Reescribir la función sin cambiar nada.
2. Multiplicar la función por el logaritmo natural de la base.
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

3. Calcular la derivada de: $f(x) = 7^{\sqrt{x}}$

Solución:

$$f(x) = 7^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 7^{u(x)} \ln 7 \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 7^{\sqrt{x}} \ln 7 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{7^{\sqrt{x}} \ln 7}{2\sqrt{x}}$$

Todo el exponente es $u(x)$

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:Calcular la derivada de: $f(x) = 3^{(7x+2)^2 \text{sen} x}$

Solución

$$f'(x) = 3^{(7x+2)^2 \text{sen} x} \ln 3 u'(x)$$

$$u(x) = (7x + 2)^2 \text{sen} x \text{ regla del producto}$$

$$u'(x) = [(7x + 2)^2]' \text{sen} x + (7x + 2)^2 (\text{sen} x)'$$

$$u'(x) = 14(7x + 2) \text{sen} x + (7x + 2)^2 \cos x$$

$$f'(x) = 3^{(7x+2)^2 \text{sen} x} \ln 3 [14(7x + 2) \text{sen} x + (7x + 2)^2 \cos x]$$

$$f'(x) = (7x + 2) 3^{(7x+2)^2 \text{sen} x} \ln 3 [14 \text{sen} x + (7x + 2) \cos x]$$

Recuerda que este símbolo representa derivada de la expresión.

Observación: No es solo derivar una función también se tiene que factorizar para dejar presentable tu respuesta.

5.5. Derivada de Funciones logarítmicas

Derivada de una función logaritmo natural:

$$y = \ln[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función inversa multiplicativa de $u(x)$.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:1. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln(4x^2 + 3)$

Solución:

$$f(x) = \ln(4x^2 + 3) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = 4x^2 + 3$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = 8x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{4x^2 + 3} \cdot (8x) = \frac{8x}{4x^2 + 3}$$

Es la inversa multiplicativa de $u(x)$

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:2. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln(\sqrt{\text{sen} x} + x)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen} x} + x} \cdot [\sqrt{\text{sen} x} + x]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen} x} + x} \cdot [(\sqrt{\text{sen} x})' + 1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen} x} + x} \cdot \left[\frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen} x}} + 1 \right]$$

Recuerda que este símbolo representa derivada de la expresión

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen}x} + x} \cdot \left[\frac{\cos x + 2\sqrt{\text{sen}x}}{2\sqrt{\text{sen}x}} \right] = \frac{\cos x + 2\sqrt{\text{sen}x}}{2\text{sen}x + 2x\sqrt{\text{sen}x}}$$

Derivada de una función logaritmo natural

$$y = \log_a u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función inversa multiplicativa de $u(x)$.

2. Multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ahora tienes dos caminos eliges el que más te convenga:

3. Multiplicar por el logaritmo de épsilon en base “a” o dividir el logaritmo natural de “a”

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \log(\text{tg}x)$

Solución:

$$f(x) = \log(\text{tg}x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x) \cdot \log_{10} e$$

$$u(x) = \text{tg}x$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\text{tg}x} \cdot (\sec^2 x) \cdot \log_{10} e$$

“a” es 10

Es la inversa multiplicativa de $u(x)$

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \log_3(x \cos x)$

Solución:

$$f(x) = \ln(x + \cos x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x) \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

$$u(x) = x + \cos x$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = 1 - \text{sen}x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{x + \cos x} \cdot (1 - \text{sen}x) \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{1 - \text{sen}x}{\ln 3 (x + \cos x)}$$

“a” es 3

Es la inversa multiplicativa de $u(x)$

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Algunas preguntas especiales:

3. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln(\sqrt{\text{sen}x})$

Solución:

$$f(x) = \ln(\sqrt{\cos x - 1}) = \ln[(\cos x - 1)^{1/2}] = \frac{1}{2} \ln(\cos x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cos x - 1)'}{\cos x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\text{sen}x}{\cos x - 1} = \frac{-\text{sen}x}{2(\cos x - 1)}$$

Para ahorrar espacio la derivada del logaritmo se puede expresar de esta forma.

En esta pregunta se usó la siguiente propiedad: $\ln A^n = n \ln A$ es común en este tipo de preguntas bajar el exponente

4. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln[x^2 \cos x]$

Solución:

$$f(x) = \ln[x^2 \cos x] = \ln[x^2] + \ln[\cos x]$$

$$f(x) = 2 \ln[x] + \ln[\cos x]$$

$$f'(x) = 2 \frac{(x)'}{x} + \frac{(\cos x)'}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{2}{x} - \operatorname{tg} x$$

Para ahorrar espacio la derivada del logaritmo se puede expresar de esta forma.

En esta pregunta se usó la siguiente propiedad: $\ln A \cdot B = \ln A + \ln B$

Observación: Las preguntas especiales solo son ejercicios donde aplicaremos las propiedades de logaritmos.

5. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln \left[\frac{2x^2}{x^3 + 2} \right]$

Solución:

$$f(x) = \ln \left[\frac{2x^2}{x^3 + 2} \right] = \ln[2] + \ln[x^2] - \ln[x^3 + 2]$$

$$f(x) = \ln[2] + 2 \ln[x] - \ln[x^3 + 2]$$

$$f'(x) = 0 + 2 \frac{(x)'}{x} + \frac{(x^3 + 2)'}{x^3 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$



En esta pregunta no era necesario descomponer el $2x^2$ si ud. desea puede resolverlo sin descomponerlo.

En esta pregunta se usó la siguiente propiedad: $\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$

6. Calcular la derivada de: $f(x) = \ln e^{x^3 \operatorname{tg} x}$

Solución:

$$f(x) = \ln e^{x^3 \operatorname{tg} x} = x^3 \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = (x^3)'(\operatorname{tg} x) + (x^3)(\operatorname{tg} x)'$$

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{tg} x + x^3 \sec^2 x *$$

$$f'(x) = x^2(3 \operatorname{tg} x + x \sec^2 x)$$

Muchas veces la función ya está derivada en * sin embargo para mejorar la derivada trataremos de factorizar o simplificar.

En esta pregunta se usó la siguiente propiedad: $\ln e^A = A$

En otros ejercicios se podrá aplicar: $e^{\ln A} = A$

Capítulo VI

Derivada de funciones trigonométricas

En este capítulo se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas elementales y sus recíprocas, atendiendo a sus dominios, periodicidad y puntos problemáticos. Se enfatiza el uso de radianes, el aprovechamiento de simetrías e identidades para simplificar antes de derivar y la combinación con el álgebra de derivadas y la regla de la cadena en expresiones compuestas. Los ejemplos conectan con aplicaciones como el movimiento circular y las ondas periódicas, y se señalan errores frecuentes, entre ellos trabajar en grados, ignorar restricciones de dominio o “olvidar” la parte interna al componer funciones. Con estas herramientas, el lector consolidará una técnica segura y criteriosa para diferenciar funciones trigonométricas en contextos reales.

6.1. Derivada de una función seno

$$y = \text{sen}[u(x)] \Rightarrow y' = \cos[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función coseno con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \text{sen}(x^7 + 4x)$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}[x^7 + 4x] \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \cos[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x) \\ u(x) &= x^7 + 4x \\ \frac{d}{dx} u(x) &= 7x^6 + 4 \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \cos[x^7 + 4x] \cdot (7x^6 + 4) \end{aligned}$$

Reescribimos $u(x)$ en la función coseno

Multiplicar por la derivada de u con respecto a

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \text{sen}(\sqrt{x^2 + 16} + 1)$

Solución:

$$f'(x) = \cos[\sqrt{x^2 + 16} + 1] \cdot (\sqrt{x^2 + 16} + 1)'$$

$$f'(x) = \cos[\sqrt{x^2 + 16} + 1] \cdot \left(\frac{(x^2 + 16)'}{2\sqrt{x^2 + 16}} \right)$$

$$f'(x) = \cos[\sqrt{x^2 + 16} + 1] \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{x \cos[\sqrt{x^2 + 16} + 1]}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

6.2. Derivada de una función coseno

$$y = \cos[u(x)] \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función $-\operatorname{sen}$ con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

Solución:

$$f(x) = \cos(\operatorname{sen} x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = -\operatorname{sen}[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = \operatorname{sen} x + x$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = \cos x + 1$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\operatorname{sen}[\operatorname{sen} x + x] \cdot (\cos x + 1)$$

El ángulo también se le conoce como argumento.

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \cos(\ln \sqrt{3x + 5})$

Solución:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}[\ln \sqrt{3x + 5}] \cdot \left(\frac{1}{2} \ln[3x + 5] \right)'$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}[\ln \sqrt{3x + 5}] \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(3x + 5)'}{3x + 5} \right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}[\ln \sqrt{3x + 5}] \cdot \frac{3}{3x + 5}$$

$$f'(x) = -\frac{3 \operatorname{sen}[\ln \sqrt{3x + 5}]}{2(3x + 5)} = -\frac{3 \operatorname{sen}[\ln \sqrt{3x + 5}]}{6x + 10}$$

Observación: En esta pregunta es más estético desarrollar el producto del denominador.

6.3. Derivada de una función tangente

$$y = tg[u(x)] \Rightarrow y' = sec^2[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función sec^2 con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejercicios de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = tg\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$

Solución:

$$f(x) = tg\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = sec^2[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}$
 $\frac{d}{dx} u(x) = \frac{1}{2} + x^2$
 $\frac{d}{dx} f(x) = sec^2\left[\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}\right] \cdot \left(\frac{1}{2} + x^2\right)$

Es el argumento del

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = tg(e^{\sqrt{\sin x}})$

Solución:

$$y' = sec^2[e^{\sqrt{\sin x}}] \cdot (e^{\sqrt{\sin x}})'$$

$$y' = sec^2[e^{\sqrt{\sin x}}] \cdot (e^{\sqrt{\sin x}})' \cdot (\sqrt{\sin x})'$$

$$y' = sec^2[e^{\sqrt{\sin x}}] \cdot (e^{\sqrt{\sin x}})' \cdot \left(\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$y' = sec^2[e^{\sqrt{\sin x}}] \cdot (e^{\sqrt{\sin x}})' \cdot \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)$$

6.4. Derivada de una función cotangente

$$y = ctg[u(x)] \Rightarrow y' = -csc^2[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función $-csc^2$ con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $y = ctg\left(\frac{3x^2}{2} + \sqrt[3]{x^2}\right)$

Solución:

$$y = \operatorname{ctg}\left(\frac{3x^2}{2} + \sqrt[3]{x^2}\right) \Rightarrow \frac{d}{dx}y = -\operatorname{csc}^2[u(x)] \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$u(x) = \frac{3x^2}{2} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d}{dx}y = -\operatorname{csc}^2\left[\frac{3x^2}{2} + \sqrt[3]{x^2}\right] \cdot \left(3x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

Es el argumento de la cotangente

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \operatorname{ctg}(\ln[\ln \operatorname{tg} x])$

Solución:

$$y' = -\operatorname{csc}^2[\ln[\ln \operatorname{tg} x]] \cdot (\ln[\ln \operatorname{tg} x])'$$

$$y' = -\operatorname{csc}^2[\ln[\ln \operatorname{tg} x]] \cdot \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{\ln[\operatorname{tg} x]}$$

$$y' = -\operatorname{csc}^2[\ln[\ln \operatorname{tg} x]] \cdot \frac{\frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x}}{\ln[\operatorname{tg} x]}$$

$$y' = -\operatorname{csc}^2[\ln[\ln \operatorname{tg} x]] \cdot \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x \ln[\operatorname{tg} x]}$$

6.5. Derivada de una función secante

$$y = \sec[u(x)] \Rightarrow y' = \sec[u(x)] \operatorname{tg}[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función $\sec$ con el mismo argumento $u(x)$ de la función secante.
2. Multiplicar por el tg con argumento $u(x)$
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $y = \sec(8x + 3)$

Solución:

$$y = \sec(8x + 3) \Rightarrow \frac{d}{dx}y = \sec[u(x)] \operatorname{tg}[u(x)] \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$u(x) = 8x + 3$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = 8$$

$$\frac{d}{dx}y = \sec[8x + 3] \operatorname{tg}[8x + 3] \cdot (8)$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \sec(\sqrt{3x + 4})$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y' &= \sec[\sqrt{3x+4}] \operatorname{tg}[\sqrt{3x+4}] \cdot (\sqrt{3x+4})' \\
 y' &= \sec[\sqrt{3x+4}] \operatorname{tg}[\sqrt{3x+4}] \cdot \left(\frac{(3x+4)'}{2\sqrt{3x+4}} \right) \\
 y' &= \sec[\sqrt{3x+4}] \operatorname{tg}[\sqrt{3x+4}] \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \right) \\
 y' &= \frac{3 \sec[\sqrt{3x+4}] \operatorname{tg}[\sqrt{3x+4}]}{2\sqrt{3x+4}}
 \end{aligned}$$

6.5. Derivada de una función cosecante

$$y = \csc[u(x)] \Rightarrow y' = -\csc[u(x)] \operatorname{ctg}[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función $-\csc$ con el mismo argumento $u(x)$ de la función cosecante.
2. Multiplicar por el ctg con argumento $u(x)$
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $y = \csc(\cos x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y &= \csc(\cos x) \Rightarrow \frac{d}{dx} y = -\csc[u(x)] \operatorname{ctg}[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x) \\
 u(x) &= \cos x \\
 \frac{d}{dx} u(x) &= -\operatorname{sen} x \\
 \frac{d}{dx} y &= -\csc[\cos x] \operatorname{ctg}[\cos x] \cdot (-\operatorname{sen} x) \\
 y' &= \operatorname{sen} x \cdot \csc[\cos x] \operatorname{ctg}[\cos x]
 \end{aligned}$$

Es el argumento de la cosecante

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \csc(\ln x) + 0.25x^4$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y' &= -\csc[\ln x] \operatorname{ctg}[\ln x] \cdot (\ln x)' + x^3 \\
 y' &= -\csc[\ln x] \operatorname{ctg}[\ln x] \cdot \frac{1}{x} + x^3 \\
 y' &= \frac{x^4 - \csc[\ln x] \operatorname{ctg}[\ln x]}{x}
 \end{aligned}$$

Algunas preguntas especiales

3. Calcular la derivada de:

$$y = \frac{\sec 2x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\csc^3 x}$$

Solución:

$$y = \frac{\sec 2x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}}{\csc^3 x} = \frac{1}{\cos 2x} \frac{\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 1}}{\frac{1}{\sin^3 x}}$$

$$y = \frac{\sin^3 x}{\cos 2x} \sqrt{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^3 x \sqrt{\cos 2x}}{\cos 2x \sin x}$$

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

En determinadas preguntas trigonométricas es mejor reducir la expresión antes de derivarlos.

$$y' = \frac{(\sin^2 x)'(\sqrt{\cos 2x}) - (\sin^2 x)(\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}$$

$$y' = \frac{2 \sin x \cos x (\sqrt{\cos 2x}) - (\sin^2 x) \frac{(-\sin 2x)}{\sqrt{\cos 2x}}}{(\sqrt{\cos 2x})^2}$$

$$y' = \frac{\sin 2x (\cos 2x) + (\sin^2 x) \sin 2x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

$$y' = \frac{\sin 2x [\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x]}{(\cos 2x)^{3/2}} = \frac{\sin 2x \cdot \cos^2 x}{(\cos 2x)^{3/2}}$$

Fórmulas más aplicadas de R.T:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x; \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ etc.}$$

4. Calcular la derivada de:

$$y = \sin^2 x + \sqrt{1 + \sin^4 x}$$

Solución:

Siendo observador en este ejercicio notamos

$$y = \sin^2 x + \sqrt{1 + \sin^4 x} = \sin^2 x + \sqrt{1 + (\sin^2 x)^2}$$

Que una expresión se repite por ende lo más conveniente será realizar un cambio de variable.

Haciendo: $u = \sin^2 x$ reescribimos la función.

$$y = u + \sqrt{1 + u^2}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + u^2}} \right) (1 + u^2)'$$

$$y' = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + u^2}} \right) (2u)$$

Querido lector el método cambio de variable es muy aplicado; se usará cuando una variable o expresión se repite demasiado.

$$y' = 1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\sqrt{1+u^2} + u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Sin embargo, la respuesta de la derivada no estaba en función de “u”; más bien estaba en función de “x” entonces que hacer? Sencillo solo reemplazaremos el valor de “u”

$$y' = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x} + \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}}$$

6.6. Relaciones en derivadas trigonométricas

Primera regla. - La derivada de todas las co-razones son negativas.

$$\begin{aligned}\cos(u) &= -\operatorname{sen}(u)u' \\ \operatorname{ctg}(u) &= -\operatorname{csc}^2(u)u' \\ \operatorname{csc}(u) &= -\operatorname{csc}(u)\operatorname{ctg}(u)u'\end{aligned}$$

El resto de derivadas son positivas.

Derivada del seno y coseno

Pues si no lo sabes el seno y el coseno tienen una relación amorosa nacida por así decirlo de:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Ves la relación entre esas funciones, pues bien:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u) &= \cos(u) u' \\ \cos(u) &= -\operatorname{sen}(u) u'\end{aligned}$$

En el caso del tangente y cotangente, si ellos también

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$$

En base a lo anterior la derivada será:

$$\operatorname{tg}(u) = \sec(u) u'$$

Sin embargo, me dirás que falta algo, recuerda que la razón tangente es la división de dos razones.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

Por esa razón se elevará al cuadrado

$$\operatorname{tg}(u) = \sec^2(u) u'$$

Del mismo modo con la cotangente será con la fórmula: $1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$

$$\operatorname{ctg}(u) = -\operatorname{csc}^2(u) u'$$

Para el caso de la secante tienes que saber que le gusta resaltar y mostrar a sus amigos.

$$\sec(u) = \sec(u) \operatorname{tg}(u) u'$$

Recuerda que la derivada de tangente mostro a la secante por ende él es su amigo.

De igual manera se comporta la cosecante.

$$\operatorname{csc}(u) = -\operatorname{csc}(u) \operatorname{ctg}(u) u'$$

Derivada de una función arcoseno:

$$y = \operatorname{arcsen}[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir 1.
2. Dividirlo por la raíz cuadrada de 1a sustracción entre 1 y $u(x)$ elevado al cuadrado.
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $y = \arcsen[x^2]$

Solución:

$$y = \arcsen[x^2] \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{1}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx} u(x) = 2x$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot (2x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Multiplicar por
la derivada de u
con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \arcsen[\cos(x)]$

Solución:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - [\cos(x)]^2}} \cdot [\cos(x)]'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

La excelencia consiste en pensar en grande y comenzar en pequeño.
Miguel Ángel Cornejo

6.7. Derivada de una función arcocoseno

$$y = \arccos[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir -1 .
2. Dividirlo por la raíz cuadrada de la sustracción entre 1 y $u(x)$ elevado al cuadrado.
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $y = \arcsen[3x^2 - 4]$

Solución:

$$y = \arccos[3x^2 - 4] \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{-1}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = 3x^2 + 4 \Rightarrow \frac{d}{dx} u(x) = 6x$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-1}{\sqrt{1 - (3x^2 - 4)^2}} \cdot (6x) = \frac{-6x}{\sqrt{24x^2 - 17 - 9x^4}}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \arccos \left[\frac{x}{a} \right]$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (a^2 - x^2)' - a \frac{-1}{\sqrt{1 - \left[\frac{x}{a} \right]^2}} \cdot \left[\frac{x}{a} \right]',$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \left[\frac{1}{a} \right]' = \frac{x + a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

Derivada de una función arcotangente

$$y = \arctg[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + u^2(x)} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir 1.
2. Dividirlo por la adición entre 1 y $u(x)$ elevado al cuadrado.
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Aplicación

Calcular la derivada de: $y = \arctg[x^2 + 1]$

Solución:

$$y = \arctg[\underbrace{x^2 + 1}] \Rightarrow \frac{d}{dx}y = \frac{1}{1 + u^2(x)} \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$u(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}u(x) = 2x$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 2}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

Calcular la derivada de: $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \arctg \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$

Solución:

$$y' = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{1 + \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2} \cdot \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right)',$$

$$y' = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{b} e^{2mx}} \cdot e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} (mx)'$$

$$y' = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \cdot \frac{b}{b + a e^{2mx}} \cdot e^{mx} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} m = \frac{e^{mx}}{b + a e^{2mx}}$$

Derivada de una función arcocotangente:

$$y = \operatorname{arcctg}[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{-1}{1 + u^2(x)} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir -1 .
2. Dividirlo por la adición entre 1 y $u(x)$ elevado al cuadrado.
3. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Aplicación

Calcular la derivada de: $y = \operatorname{arcctg}[5x + 1]$

Solución:

$$y = \operatorname{arcctg}[5x + 1] \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{-1}{1 + u^2(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = 5x + 1 \Rightarrow \frac{d}{dx} u(x) = 5$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{-1}{1 + (5x + 1)^2} \cdot (5) = \frac{-5}{25x^2 + 10x + 2}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

Calcular la derivada de: $y = \frac{1}{\operatorname{sena}} \operatorname{arcctg}(x \operatorname{sena})$

Solución:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sena}} \cdot \frac{1}{1 + (x \operatorname{sena})^2} \cdot (x \operatorname{sena})'$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sena}} \cdot \frac{1}{1 + (x \operatorname{sena})^2} \cdot \operatorname{sena}$$

$$y' = \frac{1}{1 + (x \operatorname{sena})^2}$$

Si una persona quiere aprender y te pregunta algo explícaselo, en vez de hacerla sentir tonta porque hace un tiempo tú tampoco lo sabías.

Derivada de una función arcosecante:

$$y = \operatorname{arcsec}[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir 1.
2. Dividir por el valor absoluto de $u(x)$.
3. Dividir por la raíz cuadrada de 1a sustracción entre $u(x)$ y 1 elevado al cuadrado.
4. Por último multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Aplicación

Calcular la derivada de: $y = \operatorname{arcsec}[15x]$

Solución:

$$y = \operatorname{arcsec}[15x] \Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{1}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}} \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$$u(x) = 15x \Rightarrow \frac{d}{dx} u(x) = 15$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{15}{|15x|\sqrt{(15x)^2 - 1}}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

Calcular la derivada de: $y = \frac{1}{\cos a} \operatorname{arcsec}(x^2 \cos a)$

Solución:

$$y' = \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{|x \cos a| \sqrt{(x \cos a)^2 - 1}} \cdot (x^2 \cos a)'$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sena}} \cdot \frac{1}{|x \cos a| \sqrt{(x \cos a)^2 - 1}} \cdot 2x \operatorname{sena}$$

$$y' = \frac{2x}{|x \cos a| \sqrt{(x \cos a)^2 - 1}}$$

Derivada de una función arcocosecante:

$$y = \operatorname{arccsc}[u(x)] \Rightarrow y' = \frac{-1}{|u(x)| \sqrt{u^2(x) - 1}} u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir -1 .
2. Dividir por el valor absoluto de $u(x)$.
3. Dividir por la raíz cuadrada de 1a sustracción entre $u(x)$ y 1 elevado al cuadrado.
4. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplo de aplicación:

Calcular la derivada de: $y = \operatorname{arccsc}[\operatorname{sen}^2 x]$

Solución:

$$y = \operatorname{arccsc}[\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{u(x)}] \Rightarrow \frac{d}{dx}y = \frac{-1}{|u(x)| \sqrt{u^2(x) - 1}} \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$u(x) = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \frac{d}{dx}u(x) = \operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-1}{|\operatorname{sen}^2 x| \sqrt{(\operatorname{sen}^2 x)^2 - 1}} (\operatorname{sen} 2x) = \frac{-\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 x \sqrt{\operatorname{sen}^4 x - 1}}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

Calcular la derivada de: $y = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{arccsc}(x^2)$

Solución:

$$y' = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{arccsc}(x^2)$$

$$y' = 2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x)' + \frac{1}{|x^2| \sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot (x^2)'$$

$$y' = 2\operatorname{sen}x \cos x + \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}}$$

$$y' = \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}$$

Nota: La derivada de los arcos co-razones son negativos.

6.8. Derivada de funciones hiperbólicas

Derivada de una función seno hiperbólico:

$$y = \sinh[u(x)] \Rightarrow y' = \cosh[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función coseno hiperbólico con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \sinh(\operatorname{ctgx}^2)$

Solución:

$$f(x) = \sinh[\operatorname{ctgx}^2] \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \cosh[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$u(x) = \operatorname{ctgx}^2$
 $\frac{d}{dx} u(x) = 2x \sec^2 x^2$
 $\frac{d}{dx} f(x) = \cosh[\operatorname{ctgx}^2] \cdot (2x \sec^2 x^2)$

Reescribimos $u(x)$ en la función cosh

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = e^{3x} \sinh(\sqrt{\cot x})$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y' &= (e^{3x})' \sinh(\sqrt{\cot x}) + e^{3x} [\sinh(\sqrt{\cot x})]' \\
 y' &= 3e^{3x} \sinh(\sqrt{\cot x}) + e^{3x} \cosh(\sqrt{\cot x}) [\sqrt{\cot x}]' \\
 y' &= e^{3x} \left(3 \sinh(\sqrt{\cot x}) + \cosh(\sqrt{\cot x}) \frac{1}{2\sqrt{\cot x}} (\cot x)' \right) \\
 y' &= e^{3x} \left(3 \sinh(\sqrt{\cot x}) + \cosh(\sqrt{\cot x}) \frac{1}{2\sqrt{\cot x}} \cdot -\csc^2 x \right) \\
 y' &= \frac{e^{3x}}{2\sqrt{\cot x}} (6\sqrt{\cot x} \sinh(\sqrt{\cot x}) - \cosh(\sqrt{\cot x}) \csc^2 x)
 \end{aligned}$$

Derivada de una función coseno hiperbólico:

$$y = \cosh[u(x)] \Rightarrow y' = \sinh[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función seno hiperbólico con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1})$

Solución:

$$f(x) = \cosh(\sqrt{x+1}) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \sinh[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$u(x) = \sqrt{x+1}$
 $\frac{d}{dx} u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

El ángulo también se le conoce como argumento.

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sinh[\sqrt{x+1}] \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) = \frac{\sinh[\sqrt{x+1}]}{2\sqrt{x+1}}$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \frac{1}{x} \sinh 2x + x \cosh 2x$

Solución:

$$y' = \left(\frac{1}{x} \right)' \sinh 2x + \frac{1}{x} (\sinh 2x)' + (x)' \cosh 2x + x (\cosh 2x)'$$

$$y' = \left(\frac{-1}{x^2} \right) \sinh 2x + \frac{1}{x} \cosh 2x (2x) + \cosh 2x + x \sinh 2x (2x)'$$

$$y' = \left(\frac{-1}{x^2} \right) \sinh 2x + \frac{2}{x} \cosh 2x + \cosh 2x + 2x \sinh 2x$$

$$y' = \frac{1}{x^2} (\sinh 2x + 2x \cosh 2x + x^2 \cosh 2x + 2x^3 \sinh 2x)$$

Derivada de una función tangente hiperbólico

$$y = \tanh[u(x)] \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2[u(x)] u'(x)$$

Podríamos describir el proceso como:

1. Escribir la función sech^2 con el mismo argumento $u(x)$ de la función anterior.
2. Por último, multiplicamos por la derivada de $u(x)$.

Ejemplos de aplicación:

1. Calcular la derivada de: $f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2} + \sqrt{ab}\right)$

Solución:

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2} + \sqrt{ab}\right) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \operatorname{sech}^2[u(x)] \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

$u(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{ab}$
 $\frac{d}{dx} u(x) = \frac{1}{2}$

Es el argumento del $\tanh$

Multiplicar por la derivada de u con respecto a x

$$\frac{d}{dx} f(x) = \operatorname{sech}^2\left[\frac{x}{2} + \sqrt{ab}\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Otra forma de realizar este tipo de derivadas es:

2. Calcular la derivada de: $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{tgh}^2 x)^3}$

Solución:

$$y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{1 + \operatorname{tgh}^2 x}} \cdot (1 + \operatorname{tgh}^2 x)'$$

$$y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{1 + \operatorname{tgh}^2 x}} \cdot 2(\operatorname{tgh} x)(\operatorname{tgh} x)'$$

$$y' = \frac{3}{2\sqrt[4]{1 + \operatorname{tgh}^2 x}} \cdot (\operatorname{tgh} x)\operatorname{sech}^2 x = \frac{3(\operatorname{tgh} x)\operatorname{sech}^2 x}{2\sqrt[4]{1 + \operatorname{tgh}^2 x}}$$

Como habrás notado basta conocer la fórmula para hallar la derivada de una función a continuación se le pondrá una Tabla con un resumen de fórmulas:

Tabla de derivadas

Sea “ u ” una función y “ c, a ” una constante

$(c)' = 0$	$(\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2 - 1}}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$(\operatorname{arccsc} u)' = -\frac{u'}{ u \sqrt{u^2 - 1}}$
$(e^u)' = e^u u'$	$(\sinh u)' = \cosh u \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\cosh u)' = \sinh u \cdot u'$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$	$(\operatorname{ctgh} u)' = -\operatorname{csch}^2 u \cdot u'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\operatorname{sech} u)' = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot u'$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{csch} u \operatorname{ctgh} u \cdot u'$
$(\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$	$(\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$
$(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{csc}^2 u \cdot u'$	$(\cosh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
$(\sec u)' = \sec u \tan u \cdot u'$	$(\tanh^{-1} u)' = \frac{u'}{1 - u^2}$
$(\csc u)' = -\csc u \operatorname{ctg} u \cdot u'$	$(\operatorname{ctgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{u^2 - 1}$
$(\arcsen u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$(\operatorname{sech}^{-1} u)' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$(\operatorname{csch}^{-1} u)' = \frac{-u'}{ u \sqrt{u^2 - 1}}$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Ejercicios de aplicación

Perita 1

Hallar la derivada de:

$$y = \sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}} \text{ es una función con exponente}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}}} \frac{d}{dx} (x - \sqrt{x^2 + 4}) \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} (x - \sqrt{x^2 + 4}) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}}} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x - \sqrt{x^2 + 4})}{2(\sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}}) \cdot \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{-\sqrt{x - \sqrt{x^2 + 4}}}{2\sqrt{x^2 + 4}}$$

Perita 2

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{2}{3-x}$$

Solución:

Aunque no hay ningún problema al derivar de una manera directa la función es mas conveniente operar la función.

$$y = \frac{4}{(x-3)^2} - \frac{2}{x-3} = \frac{4}{(x-3)^2} - \frac{2(x-3)}{(x-3)^2}$$

$$y = \frac{4 - 2x + 6}{(x-3)^2} = \frac{10 - 2x}{(x-3)^2} \text{ aquí derivamos por división}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(10 - 2x)[(x-3)^2] - (10 - 2x) \frac{d}{dx}[(x-3)^2]}{[(x-3)^2]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-3)^2 - (10 - 2x) \left[2(x-3) \frac{d}{dx}(x-3) \right]}{(x-3)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x^2 - 6x + 9) + (2x - 10)2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x^2 - 6x + 9) + (2x - 10)(2x - 6)}{(x-3)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2 + 12x - 18 + [4x^2 - 32x + 60]}{(x-3)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 20x + 42}{(x-3)^4} = \frac{2(x^2 - 10x + 21)}{(x-3)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-3)(x-7)}{(x-3)^4} = \frac{2(x-7)}{(x-3)^3}$$

Perita 3

Hallar la derivada de:

$$y = \sqrt[3]{|x| + x}$$

Solución:

Este ejercicio se puede resolver por derivadas laterales, pero también lo podemos resolver por formula usando la siguiente propiedad de valor absoluto:

$$|u(x)| = \sqrt{[u(x)]^2}$$

Reemplazando la formula.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{|x| + x} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2} + x} = (\sqrt{x^2} + x)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3(\sqrt{x^2} + x)^{\frac{2}{3}}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2} + x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3(|x| + x)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}} + 1 \right) = \frac{1}{3(|x| + x)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{x}{|x|} + 1 \right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3(|x| + x)^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{(x + |x|)}{|x|} \right] = \frac{(x + |x|)^{\frac{1}{3}}}{3|x|} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt[3]{x + |x|}}{3|x|} \end{aligned}$$

Perita 4

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} x \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} x^3 \sqrt{x^2} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x}$$

Solución:

Llevando a una forma de exponentes.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7} x^{\frac{7}{6}} + \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} \\ \frac{dy}{dx} &= x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \end{aligned}$$

Extraemos el factor $x^{-\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x + x^{\frac{3}{2}} \right)$$

Transformando a una forma conocida

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^{1/2})^3 + 3(x^{1/2})^2 + 3x^{1/2}1^2 + 1^3}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{\sqrt[3]{x}}$$

Perita 5

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{8 + x^3}{8 - x^3}$$

Solución:

En este tipo de ejercicios resolveremos por regla del cociente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{8 + x^3}{8 - x^3} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(8 + x^3)[8 - x^3] - (8 + x^3)\frac{d}{dx}[8 - x^3]}{[8 - x^3]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2[8 - x^3] - (8 + x^3)(-3x^2)}{[8 - x^3]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x^2 - 3x^5 + 24x^2 + 3x^5}{(8 - x^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x^2}{(8 - x^3)^4}$$

Perita 6

Hallar la derivada de:

$$y = (x + 3)^3 \sqrt[3]{x^3 + 3}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x + 3)^3 \sqrt[3]{x^3 + 3} \text{ producto de funciones}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [(x + 3)^3] \sqrt[3]{x^3 + 3} + (x + 3)^3 \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^3 + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x + 3)^2 \sqrt[3]{x^3 + 3} + (x + 3)^3 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 3)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 3)^2 \left[3\sqrt[3]{x^3 + 3} + \frac{(x + 3)x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 3)^2}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 3)^2 \left[\frac{3(x^3 + 3) + (x + 3)x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 3)^2}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 3)^2 \left[\frac{4x^3 + 3x^2 + 9}{\sqrt[3]{(x^3 + 3)^2}} \right]$$

Perita 7

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$$

Solución:

Convertir la función en exponentes.

$$y = \frac{1}{8} (1 + x^3)^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{5} (1 + x^3)^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (1 + x^3)^{\frac{5}{3}} \frac{d}{dx} (1 + x^3) - \frac{1}{3} (1 + x^3)^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} (1 + x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 (1 + x^3)^{\frac{5}{3}} - x^2 (1 + x^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1+x^3)^{\frac{2}{3}}[(1+x^3)^1 - 1]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}} = x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$$

Perita 8

Hallar la derivada de:

$$y = e^{4x} \ln 3x - \ln(\cosh x)$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{4x} \ln 3x \quad \text{producto de funciones}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [e^{4x}] \ln 3x + e^{4x} \frac{d}{dx} \ln 3x - \frac{(\cosh x)'}{\cosh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{4x} \ln 3x + e^{4x} \frac{3}{3x} - \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} \left[4 \ln 3x + \frac{1}{x} \right] - \tanh x = e^{4x} \left[\frac{4x \ln 3x + 1}{x} \right] - \tanh x$$

Perita 9

Hallar la derivada de:

$$y = \sin(4x^2 + 5) + \arcsen \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = \sin(4x^2 + 5) \cdot (4x^2 + 5) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^2}} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)'$$

$$y' = 8x \sin(4x^2 + 5) + \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - x^4 + 2x^2 - 1}} \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$y' = 8x \sin(4x^2 + 5) + \frac{2}{x\sqrt{2x^2 - 1}}$$

Perita 10

Hallar la derivada de:

$$y = \cos[\sin(3x^3)]$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos[\sin(3x^3)] \quad \text{funcion compuesta}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin[\sin(3x^3)] \frac{d}{dx} (\sin(3x^3)) \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} (\sin(3x^3)) = \cos[\sin(3x^3)] \frac{d}{dx} (3x^3)$$

$$\frac{d}{dx} (\sin(3x^3)) = \cos[\sin(3x^3)] \cdot 6x^2$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = -\sin[\sin(3x^3)] \cdot \cos[\sin(3x^3)] \cdot 6x^2$$

Perita 11

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{(\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Solución:

Aquí se está usando regla del producto α y β son números por lo que no intervienen.

$$y' = \frac{[(\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x)' e^{\alpha x} + (\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x)(e^{\alpha x})']}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y' = \frac{[(\alpha \beta \cos \beta x + \beta^2 \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} + \alpha (\alpha \operatorname{sen} \beta x - \beta \cos \beta x)(e^{\alpha x})']}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y' = \frac{e^{\alpha x} [\beta^2 \operatorname{sen} \beta x + \alpha^2 \operatorname{sen} \beta x]}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x [\beta^2 + \alpha^2]}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y' = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Perita 12

Hallar la derivada de:

$$y = |\operatorname{ctg} 2x|$$

Solución:

$$|u(x)| = \sqrt{[u(x)]^2}$$

Reemplazando la formula.

$$y = |\operatorname{ctg} 2x| = \sqrt{(\operatorname{ctg} 2x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{(\operatorname{ctg} 2x)^2} \text{ funcion compuesta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{ctg} 2x)^2}} \frac{d}{dx} ((\operatorname{ctg} 2x)^2) \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} [(\operatorname{ctg} 2x)^2] = 2(-\operatorname{csc}^2 2x) \frac{d}{dx} (2x)$$

$$\frac{d}{dx} [(\operatorname{ctg} 2x)^2] = -4\operatorname{csc}^2 2x$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{ctg} 2x)^2}} \cdot -4\operatorname{csc}^2 2x = \frac{-2\operatorname{csc}^2 2x}{y}$$

Perita 13

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{(\cos x)' \operatorname{sen}^2 x - \cos x (\operatorname{sen}^2 x)'}{(\operatorname{sen}^2 x)^2} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x - \cos x 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} + \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \right] = \frac{1}{\sin^3 x}$$

Perita 14

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{4}{\sqrt{\sec\left(\frac{x}{3}\right)}}$$

Solución:

Cambiando el secante por su equivalente en coseno:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{\sec\left(\frac{x}{3}\right)}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}}} = 4 \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 4 \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)} \text{ funcion elevado a un exponente}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2 \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}} \frac{d}{dx} \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right) \right] \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right) \right] = \left[-\sin\left(\frac{x}{3}\right) \right] \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{3} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right) \right] = -\sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{3}$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2 \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}} \cdot -\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{3} = \frac{-2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)}{3 \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}}$$

Perita 15

Hallar la derivada de:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left[\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right]$$

Solución:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \left[\ln \left[1 + \sqrt{x^2 + 1} \right] - \ln x \right]$$

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \left[\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \sqrt{x^2 + 1} \right)' - \frac{1}{x} \right]$$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) + \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{[1+\sqrt{x^2+1}]\sqrt{x^2+1}} \\
 y' &= \frac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{[1+\sqrt{x^2+1}]\sqrt{x^2+1}} \\
 y' &= \frac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}} - \frac{x[1-\sqrt{x^2+1}]}{-x^2\sqrt{x^2+1}} \\
 y' &= \frac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}} + \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}
 \end{aligned}$$

Perita 16

Hallar la derivada de:

$$y = \ln[x + \sqrt{\operatorname{sen} x}]$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln[x + \sqrt{\operatorname{sen} x}] \quad \text{funcion compuesta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{\operatorname{sen} x}} \frac{d}{dx} [x + \sqrt{\operatorname{sen} x}] \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{\operatorname{sen} x}] = 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \right] \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{\operatorname{sen} x}] = 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \right] (\cos x)$$

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{\operatorname{sen} x}] = 1 + \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \left[\frac{2\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x}{(x + \sqrt{\operatorname{sen} x})2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Perita 17

Hallar la derivada de:

$$y = \ln \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

Solución:

Aunque es muy atractivo derivar la función de inmediato, lo más recomendable será aplicar la siguiente propiedad:

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$y = \ln \left[\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] = \ln [x + \sqrt{x^2 + 1}]^{-1}$$

$$y = -\ln [x + \sqrt{x^2 + 1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} -\ln [x + \sqrt{x^2 + 1}] \quad \text{funcion compuesta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{d}{dx} [x + \sqrt{x^2 + 1}] \dots I$$

Desarrollamos la derivada

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{x^2 + 1}] = 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right] \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$$

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{x^2 + 1}] = 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right] (2x)$$

$$\frac{d}{dx} [x + \sqrt{x^2 + 1}] = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Perita 18

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tgh} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tgh}^3 \frac{x}{2}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} \right)' - \frac{1}{6} (3) \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tgh} \frac{x}{2} \right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} \left[\operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \left[1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} \right] = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \left[\operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 \frac{x}{2}$$

Perita 19

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{2} \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)^2} \right] \left(\frac{\operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)'$$

$$y' = \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left[\frac{2}{2 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2} + \left[\frac{\operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} \right] = \frac{2 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}}{2 \left(2 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} \right)}$$

$$y' = \frac{1 + \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}}{2 \left(2 + \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + 3 \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}}{2 + \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} \right]$$

Perita 20

Hallar la derivada de:

$$y = \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x \arcsen x)'(\sqrt{1-x^2}) - (x \arcsen x)(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-x^2}} \\ y &= \frac{(x \arcsen x)'}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(x \arcsen x) \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} + \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \\ y &= \frac{\arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2 \arcsen x}{(\sqrt{1-x^2})^3} - \frac{x}{1-x^2} \\ y &= \frac{\sqrt{1-x^2} \arcsen x + x}{(1-x^2)} + \frac{x^2 \arcsen x}{(\sqrt{1-x^2})^3} - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^3} \\ y &= \frac{(1-x^2) \arcsen x + x \sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^3} + \frac{x^2 \arcsen x - x \sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^3} \\ y &= \frac{\arcsen x}{(\sqrt{1-x^2})^3} \end{aligned}$$

Ejercicios especiales de regla de la cadena**Perita 21**

Hallar la derivada de:

$$\frac{dz}{dx}, \text{ si } z = 4\mu^3 + 5 \text{ donde } \mu = \sen\theta + \theta, \theta = \sqrt{x+1}$$

Solución:

La aplicación de regla de la cadena será.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots I$$

Desarrollamos las derivadas respectivas.

$$\begin{cases} \text{Si } z = 4\mu^3 + 5 & \Rightarrow \frac{dz}{d\mu} = 12\mu^2 \\ \text{Si } \mu = \sen\theta + \theta & \Rightarrow \frac{d\mu}{d\theta} = \cos\theta + 1 \quad \dots II \\ \text{Si } \theta = \sqrt{x+1} & \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

Reemplazamos en I

$$\frac{dz}{dx} = [12\mu^2] \cdot [\cos\theta + 1] \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right]$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{6\mu^2(\cos\theta + 1)}{\sqrt{x+1}}$$

Perita 22

Si $F(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(1) = 16$ y $g'(1) = 14$ determine $F'(1)$.

Solución:

Sea $F(u) = \sqrt{u}$.

Se tiene que $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Aplicamos regla de la cadena

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Donde

$$F'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ y, por tanto, } f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$$

En consecuencia:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x)$$

Caso particular del ejercicio, para $x = 1$ tenemos que

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{g(1)}} g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{16}} (14) = \frac{1}{2(4)} (14) = \frac{7}{4}$$

Perita 23

Si $f(u) = u^2 + 3u - 8$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ determine $(f \circ g)'(x)$.

Solución:

Se tiene que $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Aplicamos regla de la cadena

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \dots I$$

Donde

$$f'(u) = 2u + 3, \text{ Haciendo } u = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(g(x)) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3 = \frac{2x+2}{x-1} + 3$$

$$f'(g(x)) = \frac{2x+2+3x-3}{x-1} = \frac{5x-1}{x-1} \dots II$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[x+1](x-1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(1)(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \dots III$$

Reemplazamos II y III en I:

$$(f \circ g)'(x) = \left[\frac{5x-1}{x-1} \right] \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) = \frac{2-10x}{(x-1)^3}$$

Capítulo VII

Derivación paramétrica

Este capítulo aborda la diferenciación de curvas definidas mediante un parámetro, una herramienta indispensable cuando la representación cartesiana falla o resulta poco práctica, como en trayectorias con bucles, lazos o cambios de dirección. Verás cómo obtener la pendiente de la tangente, la velocidad y la dirección del movimiento a partir de las funciones paramétricas, y cómo identificar puntos singulares, sentido de recorrido y orientación de la curva. Se incluyen aplicaciones al movimiento en el plano y al diseño de trayectorias en física e ingeniería, junto con ejemplos progresivos que consolidan el criterio para analizar y derivar curvas paramétricas con seguridad.

7.1. Introducción a la parametrización de curvas

El estudio de las derivadas paramétricas es como una hojeada a un libro de cálculo vectorial; si joven no le mentiré es complicado sin embargo ahora se le dará los tipos para que salga victorioso a la mayoría de preguntas de este tipo; para esto será necesario tener una introducción:

Como bien sabemos en el plano cartesiano también conocido plano euclidiano o el plano $\mathbb{R}^2$; representamos a todas las cónicas y curvas como una ecuación $F(x, y) = 0$, con dos variables “x” e “y”.

Las clásicas cónicas son:

Ecuación cartesiana de la recta:

$$\mathcal{L}: Ax + By + C = 0$$

Ecuación cartesiana de la circunferencia con centro en el origen y radio “a”:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = a^2$$

Ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen y semiejes “a” y “b”:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen y semiejes “a” y “b”:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por ende, el primer paso será convertir función de variables “ x ” e “ y ” que representan las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que pertenece a una curva $\mathcal{C}$ a otra función que solo dependa de una variable “ t ” (en el cambio a coordenadas polares sería a θ), la cual llamaremos parámetro.

El proceso de cambio se le llama parametrizar en este texto nos evocaremos a las derivadas por ende no se realizará el proceso de como parametrizar sin embargo se le dará la parametrización de curvas importantes.

7.2. Ecuaciones paramétricas

Ecuación de una recta $Ax + By + C = 0$.

$$\mathcal{L} \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

Solo por ser sencillo $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de paso de la recta, para esta parametrización necesitamos por lo menos 2 puntos de paso por lo cual el segundo punto será $P_1 = (x_1, y_1)$ el motivo del segundo punto es la obtención de un vector que nos de la dirección “ $V = (a_1, a_2)$ ”.

$$(a_1, a_2) = (x_1, y_1) - (x_0, y_0)$$

Ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = acost \\ y = asent \end{cases} [0, 2\pi]$$

Donde “ a ” es el radio.

Ecuación de una parábola $y^2 = 4px$.

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = \frac{p}{m^2} \\ y = \frac{2p}{m} \end{cases} [0, 2\pi]$$

Donde “ m ” es la pendiente de la recta en ese punto.

Ecuación de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\mathcal{E} \begin{cases} x = acost \\ y = bsent \end{cases} [0, 2\pi]$$

Donde “ a ” y “ b ” son los semiejes.

Ecuación de una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\mathcal{H} \begin{cases} x = asect \\ y = btgt \end{cases} [0, 2\pi]$$

Donde “ a ” y “ b ” son los semiejes.

Ecuación de un astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asen^3 t \end{cases} [0, 2\pi]$$

Ecuación de una hipocicloide.

$$C \begin{cases} x = 2acost + acos2t \\ y = 2asent - asen2t \end{cases} [0, 2\pi]$$

Importante:

Un camino simplemente es
una curva parametrizada

Ecuación de un cardiode.

$$C \begin{cases} x = 2acost - acos2t \\ y = 2asent - asen2t \end{cases} [0, 2\pi]$$

Importancia de los caminos.

Los caminos $\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in [\alpha, \beta]$, sirve para el calculo de una integral de línea.

Los caminos $\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in [\alpha, \beta]$, curva cerrada, regular en sentido anti horario tienen facilidad de calcular el área, tan solo integrando el camino $\alpha(t)$ desde α hasta β gracias al “Teorema de green”.

En el análisis complejo la integral de las funciones de variable compleja se halla mediante caminos continuos regulares.

Topología se estudia el tema de Homotopia de caminos.

Ejercicios de Aplicación

Fresita 1Hallar dy/dx De una elipse $\begin{cases} x = acost \\ y = bsent \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en función de t

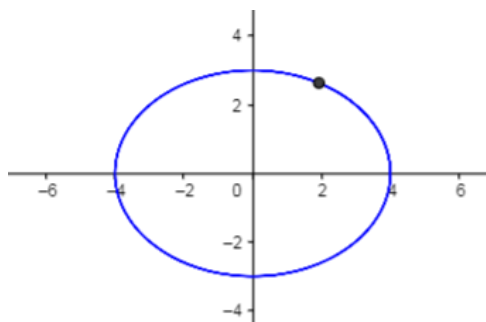
$$\frac{d}{dt}(x) = -asent$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = bcost$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{bcost}{-asent} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}ctgt$$



La figura es una elipse
con $a = 3$ y $b = 2$

Fresita 2Hallar dy/dx De una Cicloide $\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = a(1 - cost)$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = a(sent)$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{a(sent)}{a(1 - cost)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{sent}{1 - cost}$$

Importante

Si un círculo rueda,
sin resbalar, sobre una
recta fija, la línea
descrita por el punto
de la circunferencia se
le llama cicloide.

Fresita 3Hallar dy/dx De una cardioide $\begin{cases} x = 2acost - acos2t \\ y = 2asent - asen2t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = -2asent + 2asen2t = 2a(sen2t - sent)$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = 2acost - 2acos2t = 2a(cost - cos2t)$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{2a(\cos t - \cos 2t)}{2a(\sin 2t - \sin t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t}$$

Fresita 4

Hallar dy/dx

$$\text{Sea la curva descrita por } \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{\ln t}{t^2} \end{cases}$$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = (t^2)' \ln t + t^2 (\ln t)'$$

$$\frac{d}{dt}(x) = 2t \cdot \ln t + t^2 \frac{1}{t}$$

$$\frac{d}{dt}(x) = 2t \ln t + t$$

Derivamos a y en función de t

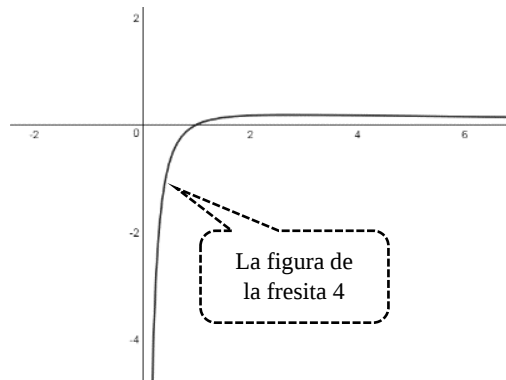
$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{(\ln t)' t - \ln t (t^2)'}{(t^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{\frac{1}{t} t - \ln t (2t)}{t^4}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{1 - 2t \ln t}{t^4}$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{\frac{1 - 2t \ln t}{t^4}}{2t \ln t + t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2t \ln t}{t^4(2t \ln t + t)}$$



Fresita 5

Hallar dy/dx

$$\text{Sea la curva descrita por } \begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{(2at)'(1+t^2) - 2at(1+t^2)'}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{2a(1+t^2) - 2at(2t)}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{2a + 2at^2 - 4at^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{2a - 2at^2}{(1+t^2)^2}$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = a \frac{(1-t^2)'(1+t^2) - (1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = a \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = a \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{\frac{-4at}{(1+t^2)^2}}{\frac{2a-2at^2}{(1+t^2)^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4at}{2a-2at^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{1-t^2}$$

Fresita 6

Hallar dy/dx

La hoja de Descartes $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{(3t)'(1+t^3) - 3t(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{3(1+t^3) - 3t(3t^2)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{3 + 3t^3 - 9t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2}$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{(3t^2)'(1+t^3) - (3t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}$$

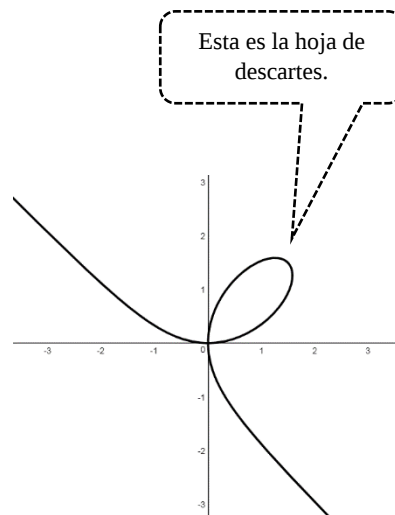
$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{6t(1+t^3) - (3t^2)(3t^2)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{6t + 6t^4 - 9t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2}$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6t-3t^4}{3-6t^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}$$



Fresita 7Hallar dy/dx

La espiral hiperbolica $\begin{cases} x = \frac{a}{t} \cos t \\ y = \frac{a}{t} \sin t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(x) = a \frac{(\cos t)'(t) - \cos t(t)'}{t^2}$$

$$\frac{d}{dt}(x) = a \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2}$$

Derivamos a y en funcion de t

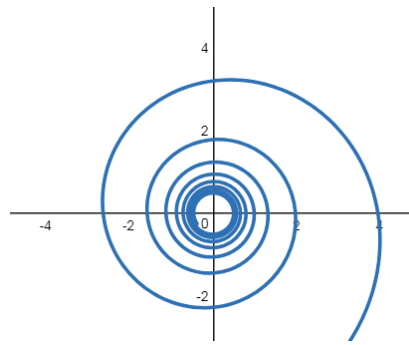
$$\frac{d}{dt}(y) = a \frac{(\sin t)'(t) - \sin t(t)'}{t^2}$$

$$\frac{d}{dt}(y) = a \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{a \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}}{a \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t \cos t - \sin t}{-t \sin t - \cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t - t \cos t}{t \sin t + \cos t}$$



La figura es la
espiral
hiperbólica

Fresita 8Hallar dy/dx

La Bruja de Agnesi $\begin{cases} x = 2t \tan t \\ y = 2 \sin^2 t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

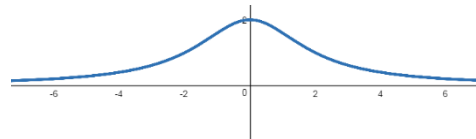
$$\frac{d}{dt}(x) = -2 \csc^2 t$$

Derivamos a y en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(y) = 2 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin 2t$$

Dividimos

$$\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{d}{dt}(x)} = \frac{2 \sin 2t}{-2 \csc^2 t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin 2t \sin^2 t$$



La figura es la
Bruja de Agnesi

Fresita 9

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

Circunferencia $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en función de t

$$\frac{d}{dt}(x) = -3\sin t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x) = -3\cos t$$

Derivamos a y en función de t

$$\frac{d}{dt}(y) = 3\cos t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = -3\sin t$$

Reemplazamos en la fórmula descrita:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-3\sin t) \cdot (-3\sin t) - (3\cos t) \cdot (-3\cos t)}{(-3\sin t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}{(-3\sin t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9(\sin^2 t + \cos^2 t)}{-27\sin^3 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}$$

Fresita 10

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

Cicloide $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$

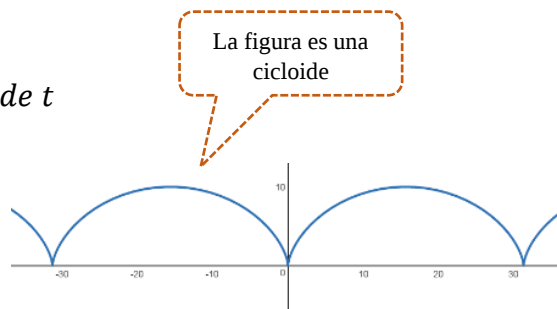
Solución:

Derivamos a x en función de t

$$x = 3t - 3\sin t$$

$$\frac{d}{dt}(x) = 3 - 3\cos t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x) = 3\sin t$$



Derivamos a y en función de t

$$y = 3 - 3\cos t$$

$$\frac{d}{dt}(y) = 3\text{sent}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = 3\text{cost}$$

Reemplazamos en la formula descrita:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3\text{cost}) \cdot (3 - 3\text{cost}) - (3\text{sent}) \cdot (3\text{sent})}{(3 - 3\text{cost})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9\text{cost} - 9\cos^2t - 9\text{sen}^2t}{[3(1 - \text{cost})]^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9[\text{cost} - (\cos^2t + \text{sen}^2t)]}{3^3[1 - \text{cost}]^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9[\text{cost} - 1]}{27[1 - \text{cost}]^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{3[1 - \text{cost}]^2} \text{ aqui ya es la respuesta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{3\left[2\text{sen}^2\frac{t}{2}\right]^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{12\text{sen}^4\frac{t}{2}}$$

Fresita 11

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

Sea la curva descrita por $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(x) = e^t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x) = e^t$$

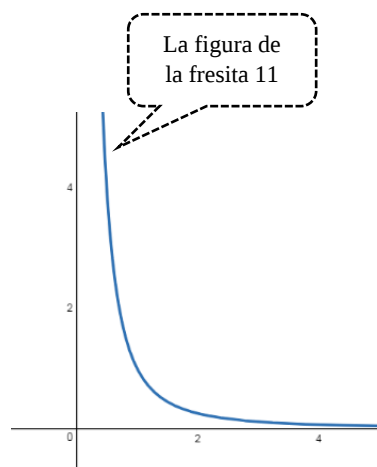
Derivamos a y en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(y) = -2e^{-2t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = 4e^{-2t}$$

Reemplazamos en la formula descrita:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$



$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(4e^{-2t}) \cdot (e^t) - (-2e^{-2t}) \cdot (e^t)}{(e^t)^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{4e^{-t} + 2e^{-t}}{[e^t]^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{6e^{-t}}{e^{3t}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6e^{-4t}\end{aligned}$$

Fresita 12

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

involuta de circulo $\begin{cases} x = 4\cos t + 4\sin t \\ y = 4\sin t + 4\cos t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x) &= -4\sin t + 4\cos t = 4(\cos t - \sin t) \\ \frac{d^2}{dt^2}(x) &= -4\cos t - 4\sin t = -4(\sin t + \cos t)\end{aligned}$$

Derivamos a y en funcion de t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y) &= 4\cos t - 4\sin t = 4(\cos t - \sin t) \\ \frac{d^2}{dt^2}(y) &= -4\sin t - 4\cos t = -4(\sin t + \cos t)\end{aligned}$$

Reemplazamos en la formula descrita:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-16(\cos^2 t - \sin^2 t) - [-16(\cos^2 t - \sin^2 t)]}{(4(\cos t - \sin t))^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{0}{(4(\cos t - \sin t))^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 0\end{aligned}$$

Fresita 13

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

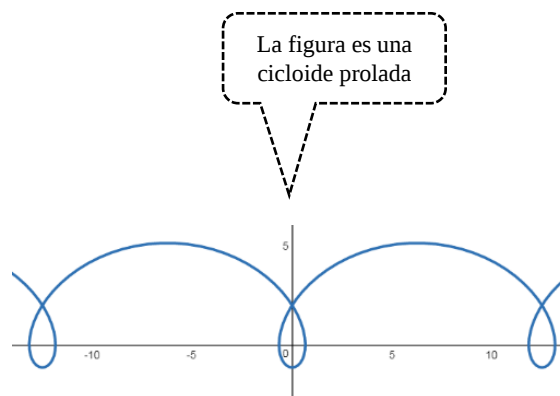
Cicloide prolada $\begin{cases} x = 2t - \pi \sin t \\ y = 2 - \pi \cos t \end{cases}$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x) &= 2 - \pi \cos t \\ \frac{d^2}{dt^2}(x) &= \pi \sin t\end{aligned}$$

Derivamos a y en funcion de t



$$\frac{d}{dt}(y) = \pi \text{sent}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = \pi \text{cost}$$

Reemplazamos en la formula descrita:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\pi \text{cost})(2 - \pi \text{cost}) - (\pi \text{sent})(\pi \text{sent})}{(2 - \pi \text{cost})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\pi \text{cost} - \pi^2 \cos^2 t - \pi^2 \text{sen}^2 t}{(4(\text{cost} - \text{sent}))^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\pi \text{cost} - \pi^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}{64(\text{cost} - \text{sent})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi(2\text{cost} - \pi)}{64(\text{cost} - \text{sent})^3}$$

Fresita 14

$$\text{Hallar } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{envolvente de circulo} \begin{cases} x = 2\text{cost} + 2\text{tsent} \\ y = 2\text{sent} - 2\text{tcost} \end{cases}$$

Solución:

Derivamos a x en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(x) = -2\text{sent} + 2\text{sent} + 2\text{tcost} = 2\text{tcost}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x) = 2\text{cost} - 2\text{tsent}$$

Derivamos a y en funcion de t

$$\frac{d}{dt}(y) = 2\text{cost} - 2\text{cost} + 2\text{tsent} = 2\text{tsent}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = 2\text{sent} + 2\text{tcost}$$

Reemplazamos en la formula descrita:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\text{tsentcost} + 4t^2 \cos^2 t - (4\text{tsentcost} - 4t^2 \text{sen}^2 t)}{(2\text{tcost})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t^2 \cos^2 t + 4t^2 \text{sen}^2 t}{(2\text{tcost})^3} = \frac{4t^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}{(2\text{tcost})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t^2}{(2\text{tcost})^3}$$

Fresita 15

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$; De la funcion $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

Solución:

Otra forma de resolver este ejercicio

Derivamos a x en funcion de t

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt}(y) = \frac{1}{3\sqrt{t^2}} = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{d}{dt}(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \end{cases} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}t^{-\frac{7}{6}}\right) = -\frac{1}{9}t^{-\frac{7}{6}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{9}t^{-\frac{7}{6}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{9}t^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Aunque me gusta bastante la formula usada del ejercicio 9 este método resulta más práctico.

Alguien dijo prueba mis habilidades

Hallar dy/dx

Parábola $\begin{cases} x = at^2 \\ \text{semicúbica } y = at^3 \end{cases}$

Rpta. $\frac{3}{2}t$

Hallar dy/dx

Cicloide curlata $\begin{cases} x = 2t - \text{sent} \\ y = 2 - \text{cost} \end{cases}$

Rpta. $\frac{\text{sent}}{2 - \text{cost}}$

Hallar dy/dx

Del camino $\begin{cases} x = \text{cost} \\ y = \text{sen}2t - \text{sent} \end{cases}$

Rpta. $-\frac{2\cos2t - \text{cost}}{\text{sent}}$

Hallar dy/dx

Nefroide $\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(3\text{cost} - \cos3t) \\ y = \frac{1}{2}a(3\text{sent} - \text{sen}3t) \end{cases}$

Rpta. $\frac{\text{cost} - \cos3t}{\text{sent} - \text{sen}3t}$

Hallar dy/dx

Lemniscata de Bernoulli $\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} \\ y = \frac{at^2\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} \end{cases} - 1 \leq t \leq 1$

Hallar dy/dx

Astroide $\begin{cases} x = a\cos^3t \\ y = a\text{sen}^3t \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

Rpta. tgt

Hallar dy/dx

Epicycloide de 3 picos $\begin{cases} x = 4\text{cost} - \cos4t \\ y = 4\text{sent} - \text{sen}4t \end{cases}$

Rpta. $\frac{\text{cost} - \cos4t}{\text{sen}4t - \text{sent}}$

Hallar dy/dx

Epícloide de 4 picos $\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases}$ Rpta. $\frac{\cos t - \cos 5t}{\sin 5t - \sin t}$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

Bruja de agnesi $\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ctg}(t) \\ y = a \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

La función $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$ Rpta. $2t^2 + 2$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

La función $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ Rpta. $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t + \sin t)^3}$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

La función $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ Rpta. $\frac{1}{12\cos^4 t \sin t}$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

La función $\begin{cases} x = \ln t \\ y = (1 - t)^{-1} \end{cases}$ Rpta. $\frac{t(1 + t)}{(1 - t)^3}$

Te paso que llevando el curso de geometría analítica el docente te pedía la ecuación de la recta tangente paralela al punto de una circunferencia y este ejercicio era muy complicado, pues bien, el problema se reduce si puedes determinar la derivada de esas curvas sin embargo ellas no se pueden despejar, en este capítulo lo que haremos será aprender a derivar curvas sin la necesidad de despejar la variable; exacto la derivaremos tal cual la veamos.

Capítulo VIII

Derivada implícita

Cuando una curva está dada por una relación entre variables y no como y despejada en función de x , la derivada implícita permite hallar la tasa de cambio sin reescribir la ecuación. La idea es diferenciar ambos lados respecto de x tratando a y como una función de x , aplicar con cuidado la regla de la cadena y, al final, aislar dy/dx . Esta técnica resulta clave en curvas clásicas como circunferencias y elipses, en restricciones geométricas y en modelos donde despejar es impracticable; además, ayuda a detectar puntos singulares, tangentes verticales y dominios efectivos. Se subrayan errores frecuentes, olvidar que y depende de x o no agrupar correctamente términos y se ofrecen ejemplos breves que consolidan un procedimiento claro y fiable.

8.1. Método de derivadas parciales

Así que ya sabes derivar supongo que ya estás en modo sabio que bien haber y si probamos tus habilidades con los siguientes ejercicios:

$$y = 3x^2 + 5$$

Así que la respuesta es:

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

Genial entonces quisiera que derives la siguiente función.

$$y^2 = 5x^2 + 8$$

Así que eres de los chicos que dicen:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{5x^2 + 8} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(5x^2 + 8)'}{2\sqrt{5x^2 + 8}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 8}} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 8}}$$

Uhm... estuvo más complicado entonces como los matemáticos y los ingenieros somos geniales aplicaremos n nuevo método de resolución:

$$\begin{aligned} 2yy' &= 10x \\ y' &= \frac{5x}{y} \end{aligned}$$

Si ya está resuelto muy sencillo verdad.

Así que tú eres de las personas que despejan a “y” y luego lo deriva, sensacional entonces derive la siguiente expresión

$$y + y^2 = 3x^2 + 5x + 20$$

¿Pudiste despejarlo? Apostaría a que no y si lo intento le fue más complicado así que trazaremos un nuevo camino para este tipo de ejercicios:

Derivamos:

$$y' + 2yy' = 9x^2 + 5x$$

Factorice y'

$$\begin{aligned} y'(1 + 2y) &= 9x^2 + 5x \\ y' &= \frac{9x^2 + 5}{1 + 2y} \end{aligned}$$

Todo vacan, pero y como se hace la derivación implícita:
Serán 2 grandes grupos de ejercicios cuando nos pidan y'

8.2. Reglas de diferenciación implícita

Derivar:

$$3y^2 + y = 4x^2 + 5x + 20$$

1er paso derivar todas las variables.

$$6y + 1 = 6x + 1$$

2do paso: Agregar el termino " y' " en cada termino que haya derivado “y” la razón es que nos piden y'

$$6yy' + 1y' = 6x + 1$$

3er paso: Factorizar el termino " y' " y despejarlo

$$\begin{aligned} y'(6y + 1) &= 6x + 1 \\ y' &= \frac{6x + 1}{6y + 1} \end{aligned}$$

Hallar y' en: $y^2 + xy = 3\sqrt{x} + 8$

En el segundo término del miembro izquierdo derivarlo como producto de funciones

$$\begin{aligned} 2y + y + x &= \frac{3}{2\sqrt{x}} \\ 2yy' + y + xy' &= \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$y'(2y + x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - y$$

$$y'(2y + x) = \frac{3 - 2y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\frac{3 - 2y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{2y + x}$$

$$y' = \frac{3 - 2y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2y + x)}$$

Ejercicios de aplicación

Determine las derivadas implícitas y' también x' .

Uvita 1

$y^2 = 4px$ ecuación de la parábola

Solución:

$$2yy' = 4p$$

$$y' = \frac{4p}{2y}$$

$$y' = \frac{2p}{y}$$

Aquí hallaremos x'

$$2y = 4px'$$

$$x' = \frac{2y}{4p}$$

$$x' = \frac{y}{2p}$$

Uvita 2

$x^2 + y^2 = a^2$ ecuación de la circunferencia

Solución:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Aquí hallaremos x'

$$2xx' + 2y = 0$$

$$2xx' = -2y$$

$$x' = \frac{-y}{x}$$

Uvita 3

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ecuación de la elipse

Solución:

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

$$2a^2yy' = -2b^2x$$

$$y' = \frac{-b^2x}{a^2y}$$

Aquí hallaremos x'

$$2b^2xx' + 2a^2y = 0$$

$$2b^2xx' = -2a^2y$$

$$y' = \frac{-a^2y}{b^2x}$$

Uvita 4

$b^2x^2 = ya^2b^2$ ecuación de la hipérbola

Solución:

$$2b^2x = a^2b^2y'$$

$$y' = \frac{2x}{a^2}$$

Aquí hallaremos x'

$$2b^2xx' = a^2b^2$$

$$x' = \frac{a^2}{2x}$$

Uvita 5

$y^3 - 3y + 2ax = 0$ ecuación cubica

Solución:

$$3y^2y' - 3y' + 2a = 0$$

$$y'(3y^2 - 3) = -2a$$

$$y' = \frac{-2a}{3y^2 - 3}$$

Aquí hallaremos x'

$$3y^2 - 3 + 2ax' = 0$$

$$x' = \frac{3 - 3y^2}{2a}$$

Uvita 6

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Solución:

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} y' = 0$$

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{-y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Uvita 7

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Solución:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$y^{-\frac{1}{3}}y' = -x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}}$$

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Uvita 8

$$y^2 - 2xy + b^2 = 0$$

Solución:

$$2yy' - 2(x'y + xy') + 0 = 0$$

$$2yy' - 2(y + xy') = 0$$

$$yy' - y - xy' = 0$$

$$y'(y - x) = y$$

$$y' = \frac{y}{y - x}$$

Uvita 9

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Solución:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(x'y + xy') = 0$$

$$x^2 + y^2y' - a(y + xy') = 0$$

$$x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0$$

$$y'(y^2 - ax) = ay - x^2$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Aquí hallaremos x'

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}x' + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$x^{-\frac{1}{3}}x' = -y^{-\frac{1}{3}}$$

$$x' = \frac{-y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}} \Rightarrow x' = \frac{-x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

Aquí hallaremos x'

¿Ya te diste cuenta? El x' es muy fácil de hallar si ya sacaste el y' , si solo es su inversa

En la uvita 8

$$x' = \frac{y - x}{y}$$

Importante. Cuando nos piden x' simplemente lo tomamos a x como la función.

Uvita 10

$$y = \cos(x + y)$$

Solución:

$$y' = -\operatorname{sen}(x + y) \cdot (x + y)'$$

$$y' = -(1 + y')\operatorname{sen}(x + y)$$

$$y' = -\operatorname{sen}(x + y) - y'\operatorname{sen}(x + y)$$

$$y'(1 + \operatorname{sen}(x + y)) = -\operatorname{sen}(x + y)$$

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}(x + y)}{1 + \operatorname{sen}(x + y)}$$

Aquí hallaremos x'

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}x' + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{x'}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{y^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x' = \frac{-x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$x' = -\sqrt{\frac{x}{y}}$$

Uvita 11

$$x = \cos(xy)$$

Solución:

$$1 = -\operatorname{sen}(xy) \cdot (xy)'$$

$$1 = -\operatorname{sen}(xy) \cdot (y + xy')$$

$$1 = -y\operatorname{sen}(xy) - xy'\operatorname{sen}(xy)$$

$$xy'\operatorname{sen}(xy) = -y\operatorname{sen}(xy) - 1$$

$$y' = \frac{-(y\operatorname{sen}(xy) + 1)}{x\operatorname{sen}(xy)}$$

Uvita 12

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Solución:

Ya que no se indica la relación de “ k ” lo tomaremos como un número por lo cual realizaremos la siguiente sustitución.

$$b = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = b \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \left(\frac{y}{2}\right)' = b \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$\frac{1}{4 + y^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y' = b \frac{1}{4 + x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{4 + y^2} \cdot y' = \frac{2b}{4 + x^2} \Rightarrow y' = b \frac{4 + y^2}{4 + x^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \frac{4 + y^2}{4 + x^2}$$

Uvita 13

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Solución:

Este ejercicio es relativamente complicado por lo tanto tengamos cuidado al momento de realizar las operaciones es muy frecuente que el estudiante cometa errores aritméticos.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)'}{x^2 + y^2} \\ \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{(y)'x - y(x)'}{x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} \\ \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} \\ y'x - y &= x + yy' \Rightarrow y'x - yy' = x + y \\ y'(x - y) &= x + y \\ y' &= \frac{x + y}{x - y} \end{aligned}$$

Uvita 14

$$b \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} b \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{(x^2 + y^2)'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{b}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{(y)'x - y(x)'}{x^2} &= \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{bx^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ b(y'x - y) &= (x + yy')\sqrt{x^2 + y^2} \\ by'x - by &= x\sqrt{x^2 + y^2} + yy'\sqrt{x^2 + y^2} \\ by'x - yy'\sqrt{x^2 + y^2} &= by + x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y'(bx - y\sqrt{x^2 + y^2}) &= by + x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{by + x\sqrt{x^2 + y^2}}{bx - y\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Uvita 15

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = xy$$

Solución:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(\frac{x}{y}\right)' = (x)'(y) + (x)(y)'$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2 + x^2} \cdot \frac{(x)'y - x(y)'}{y^2} &= y + xy' \\
\frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} &= y + xy' \\
\frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} &= y + xy' \\
y - xy' &= (y + xy')(y^2 + x^2) \\
y - xy' &= y^3 + yx^2 + xy^2y' + x^3y' \\
y - y^3 - yx^2 &= xy^2y' + x^3y' + xy' \\
y - y^3 - yx^2 &= (xy^2 + x^3 + x)y' \\
y' &= \frac{y - y^3 - yx^2}{xy^2 + x^3 + x}
\end{aligned}$$

Uvita 16

Derivar la función en el punto $x = -58/3$ e $y = 1$

$$\sqrt{\frac{y - \sqrt{x}}{y + \sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{y + \sqrt{x}}{y - \sqrt{x}}} = \frac{3}{4}$$

Solución:

Como se mencionó antes algunos problemas necesitan de un desarrollo previo.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{y - \sqrt{x}}{y + \sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{y + \sqrt{x}}{y - \sqrt{x}}} &= \frac{\left(\sqrt{y - \sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y + \sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{(y)^2 - (\sqrt{x})^2}} = \\
\frac{y - \sqrt{x} + y + \sqrt{x}}{\sqrt{y^2 - x}} &= \frac{2y}{\sqrt{y^2 - x}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos la nueva expresión encontrada que es más fácil de derivar.

$$\frac{2y}{\sqrt{y^2 - x}} = \frac{3}{4}$$

Ahora si procedemos a derivar

$$\begin{aligned}
\frac{(2y)'(\sqrt{y^2 - x}) - (2y)(\sqrt{y^2 - x})'}{(\sqrt{y^2 - x})^2} &= 0 \\
2y'\sqrt{y^2 - x} - (2y)\frac{1}{2\sqrt{y^2 - x}}(2yy' - 1) &= 0 \\
\frac{2y'(y^2 - x)}{\sqrt{y^2 - x}} - \frac{y(2yy' - 1)}{\sqrt{y^2 - x}} &= 0 \\
\frac{2y^2y' - 2xy' - 2y^2y' + y}{\sqrt{y^2 - x}} &= 0 \\
-2xy' + y = 0 &\Rightarrow -2xy' = -y
\end{aligned}$$

$$y' = \frac{y}{2x} \Rightarrow y' = \left[\frac{y}{2x} \right]_{\left(-\frac{58}{3}; 1\right)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{-58}{3}} = \frac{-3}{116}$$

Uvita 17

Determine la segunda derivada de:

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Solución:

$$8x + 18yy' = 0 \Rightarrow 9yy' = -4x$$

$$y' = \frac{-4x}{9y}$$

Bueno hasta ahí bastante fácil, ahora viene la segunda derivada.

$$y'' = \frac{(-4x)'(9y) - (-4x)(9y)'}{(9y)^2}$$

$$y'' = \frac{-4(9y) + 4x9y'}{(9y)^2} = \frac{-36y + 36x\left(\frac{-4x}{9y}\right)}{81y^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-36y^2 - 16x^2}{y}}{81y^2} = \frac{-4(4x^2 + 9y^2)}{81y^3} = \frac{-4(36)}{81y^3}$$

$$y'' = \frac{-16}{9y^3}$$

¿Lo notaste? Tras sustituir la primera derivada, fue necesario recuperar la expresión de la función original para reemplazarla también.

Uvita 18.

Determine la segunda derivada de:

$$y = \operatorname{tg}(x + y)$$

Solución:

$$y' = \sec^2(x + y) \cdot [x + y]'$$

$$y' = [1 + \operatorname{tg}^2(x + y)] \cdot (1 + y')$$

$$y' = [1 + y^2] \cdot (1 + y')$$

$$y' = 1 + y^2 + y' + y^2 y'$$

$$y^2 y' = 1 + y^2 \Rightarrow y' = \frac{1 + y^2}{y^2}$$

$$y' = -y^{-2} - 1$$

Hallando la segunda derivada

$$y'' = 2y^{-3} \cdot y'$$

$$y'' = 2y^{-3} \cdot (-y^{-2} - 1)$$

$$y'' = 2y^{-5} - 2y^{-3}$$

En esta pregunta se aprovechó una identidad trigonométrica que simplifica la forma inicial, de modo que la primera derivada se obtiene con facilidad. La segunda derivada también resulta directa y, de ser necesario, la tercera, cuarta, etc., pueden calcularse sin mayor dificultad. Por ello, el ejercicio es particularmente instructivo.

Método 2: derivación implícita mediante derivadas parciales

En este método se reescribe la relación como $F(x, y) = 0$ y se emplean **derivadas parciales** para resolver:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Donde:

$\frac{\partial F}{\partial x}$: Es la derivada parcial con respecto a x .

Para esto se considera " x " como única variable el resto de letras se considerarán constantes.

$\frac{\partial F}{\partial y}$: Es la derivada parcial con respecto a y .

Para esto se considera " y " como única variable el resto de letras se considerarán constantes.

Uvita 19

$$y^3 - 3y + x = 0$$

Solución: Como es igual a cero $F(x, y)$ se toma de inmediato

Haciendo $F(x, y) = y^3 - 3y + x$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 - 0 + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1$$

Reemplazamos los valores.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3 + 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3y^2 - 3}$$

Uvita 20

$$x^2 = y^2 + xy$$

Solución: En este caso la función no es igual a cero lo único que haremos será enviar los términos a un lado.

$$0 = y^2 + xy - x^2$$

Haciendo $F(x, y) = y^2 + xy - x^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 + y - 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2x$$

Reemplazamos los valores.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x + 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y - 2x}{2y + x}$$

Uvita 21

Derivar la expresión y calcular la derivada en $y = 1$

$$y^2 3^x - 3^{-x} = 4y$$

Solución:

En este caso la función no es igual a cero lo único que haremos será enviar los términos a un lado.

$$y^2 3^x - 3^{-x} - 4y = 0$$

Haciendo $F(x, y) = y^2 3^x - 3^{-x} - 4y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3 - 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln 3 (y^2 3^x + 3^{-x})$$

Reemplazamos los valores.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y 3^x - 0 - 4 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y 3^x - 4 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln 3 (y^2 3^x + 3^{-x})}{2y 3^x - 4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[-\frac{\ln 3 (y^2 3^x + 3^{-x})}{2y 3^x - 4} \right]_{y=1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 3 (3^x + 3^{-x})}{2(3^x - 2)}$$

Uvita 22

Derivar la expresión y calcular la derivada en $x = 1$ e $y = e$

$$x \ln y - y \ln x = 1$$

Solución: En este caso la función no es igual a cero lo único que haremos será enviar los términos a un lado.

$$x \ln y - y \ln x - 1 = 0$$

Haciendo $F(x, y) = x \ln y - y \ln x - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln y - \frac{y}{x} - 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x \ln y - y}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x}{y} - \ln x - 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x - y \ln x}{y} \end{aligned}$$

Reemplazamos los valores.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x \ln y - y}{x}}{\frac{x - y \ln x}{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[-\frac{y(x \ln y - y)}{x(x - y \ln x)} \right]_{(1;e)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e(1 \ln e - e)}{1(1 - e \ln 1)} = \frac{e(1 - e)}{1 - e(0)} = e(1 - e)$$

Quizá usted se enfrente a un tipo especial de ejercicio el cual es de la

forma: $y = \sqrt{5 + x^2 \sqrt{5 + x^2 \sqrt{5 + x^2 \sqrt{\dots}}}}$ solo quedara usar algebra

básica. $y^2 = 5 + x^2 y$ luego derivar.

Prueba de habilidades

Determine las derivadas implícitas y' .

$$y^3 = 8px \quad \text{Rpta. } \frac{8p}{3y^2}$$

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{Rpta. } \frac{-x}{y}$$

$$ax^3 + by^3 = ab \quad \text{Rpta. } \frac{-ax^2}{by^2}$$

$$bx^3 - ay^3 = ab \quad \text{Rpta. } \frac{bx^2}{ay^2}$$

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{3}{4}} = a \quad \text{Rpta. } \frac{-4^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{y}}{9^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{x^2}}$$

$$y^2 + x^2y = x \quad \text{Rpta. } \frac{1 - 2xy}{2y + x^2}$$

$$6x^2y^2 + 2x^2y^5 = 10 \quad \text{Rpta. } \frac{-(6xy^2 + 2xy^5)}{6x^2y + 5x^2y^4}$$

$$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = (x^2 + y^2)^2$$

$$\text{Rpta. } \frac{x[(2a - 2)x^2 + by - 2y^2]}{y[(2 - b)x^2 + (2 - 2c)y^2]}$$

$$\sqrt{2xy} + \sqrt{y} = z \quad \text{Rpta. } \frac{-y}{2x + \sqrt{2x}}$$

$$(x + y)^2 + \sqrt{y^{\frac{2}{3}}} = a \quad \text{Rpta. } \frac{-6(x + y)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{y^2}}{6x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{y^2} + 6^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{y^5} + 1}$$

$$y^3 - \frac{x}{y} + b^2 = 0 \quad \text{Rpta. } \frac{y}{3y^4 + x}$$

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = a \quad \text{Rpta. } \frac{1}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

Determine la primera derivada

$$1 + xy = xy(e^{xy} - e^{-xy}) \quad \text{Rpta. } \frac{-y}{x}$$

Determine la segunda derivada de:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{Rpta. } \frac{-b^4}{a^2y^3}$$

Determine la segunda derivada de:

$$y = x + \arctg y \quad \text{Rpta. } -\frac{2y^4 + 2}{y^5}$$

Determine la segunda derivada en el punto (0,1)

$$x^4 + y^4 = 1 + xy \quad \text{Rpta. } \frac{-1}{16}$$

Determine la segunda derivada en el punto (1,1)

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0 \quad \text{Rpta. } \frac{-1}{16}$$

Determine la derivada de:

$$y = \sqrt{2x - 1\sqrt{2x - 1\sqrt{2x - 1} \dots \infty}} \quad \text{Rpta. } \frac{2}{2y + 1}$$

Capítulo IX

Derivación logarítmica

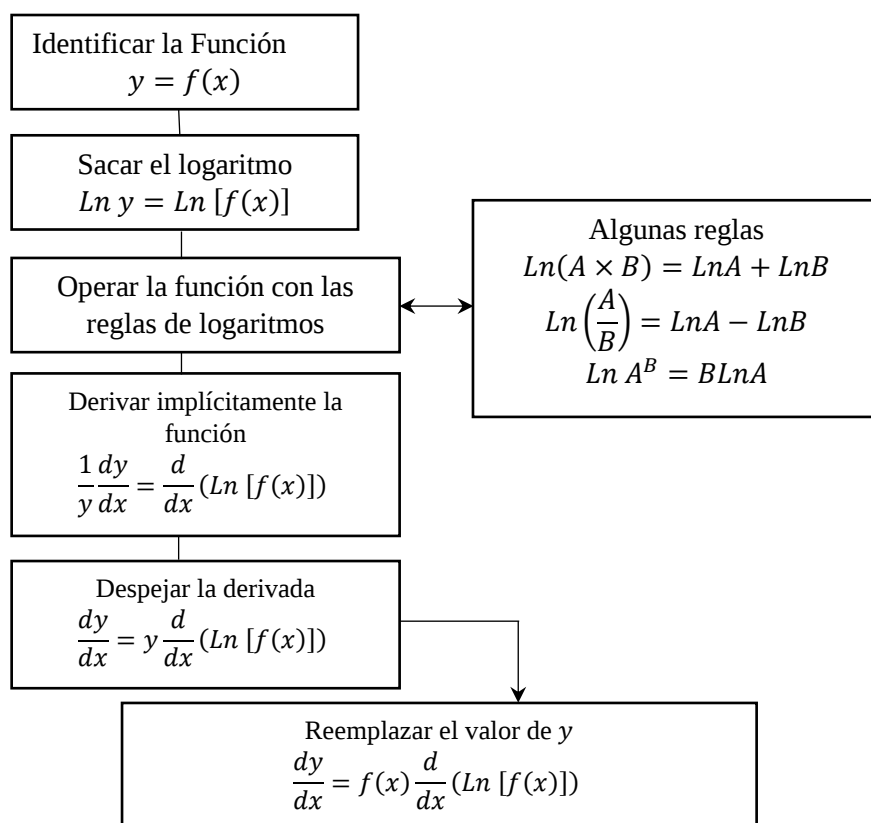
La derivación logarítmica es una técnica que simplifica el cálculo de derivadas en expresiones “pesadas”: productos de muchos factores, cocientes complicados y potencias donde la base y/o el exponente dependen de la variable. La idea es aplicar el logaritmo a ambos lados, transformar productos en sumas y potencias en factores, derivar con regla de la cadena e “invertir” el logaritmo al final. Su utilidad destaca en funciones como x elevada a x , potencias con base trigonométrica o exponencial y productos largos, reduciendo pasos y errores. Se enfatizan las condiciones de dominio trabajar con funciones positivas, o usar logaritmo de valor absoluto cuando corresponda y se señalan fallos habituales, como olvidar que la función interna también se deriva o perder términos al expandir. Con esta herramienta, muchas derivadas que lucen intratables se vuelven manejables y transparentes.

9.1. Derivada de funciones exponenciales

Este método se usará cuando te pidan derivar funciones de la forma:

- $y = f(x) \times g(x) \times a(x) \times \dots$ es decir, muchos productos.
- $y = [f(x)]^{g(x)}$ función elevada a otra función.

Para este tipo de preguntas se recurrirá al siguiente esquema del **método de derivación logarítmica**.



Ejemplos de aplicación:

1. Derivar $y = (x + 1)(x^2 + 3)$

Esta pregunta se resolverá por 3 métodos.

Método 1.

El primer método consiste en multiplicar la función

$$y = x^3 + x^2 + 3x + 3$$

Y luego derivar

$$y' = 3x^2 + 2x + 3$$

Listo.

Método 2.

Este método consiste en usar la regla del producto.

$$\begin{aligned}
 y &= uv \Rightarrow y' = u'v + uv' \\
 y' &= (x + 1)'(x^2 + 3) + (x + 1)(x^2 + 3)' \\
 y' &= (1)(x^2 + 3) + (x + 1)(2x) \\
 y' &= x^2 + 3 + 2x^2 + 2x \\
 y' &= 3x^2 + 2x + 3
 \end{aligned}$$

Método 3.

Aquí usaremos el método de logaritmos. Siguiendo los pasos descritos en el esquema

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln(x + 1)(x^2 + 3) \\
 \ln y &= \ln(x + 1) + \ln(x^2 + 3) \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{(x + 1)'}{(x + 1)} + \frac{(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)} \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{1}{(x + 1)} + \frac{2x}{(x^2 + 3)}
 \end{aligned}$$

$$y' = y \left[\frac{1}{(x+1)} + \frac{2x}{(x^2+3)} \right]$$

$$y' = (x+1)(x^2+3) \left[\frac{1}{(x+1)} + \frac{2x}{(x^2+3)} \right]$$

2. Derivar $y = (x+1)^5(3x^3+2)$

Método 1.

Desarrollar esta pregunta por el método 1 realmente es muy agotador, sin embargo, si no recordamos nada sería bueno empezar a multiplicar.

Método 2.

Usar la regla del producto si es factible sin embargo un poco pesado, si quieres verlo ahí está:

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$y' = [(x+1)^5]'(3x^3+2) + (x+1)^5(3x^3+2)'$$

$$y' = [5(x+1)^4(x+1)'](3x^3+2) + (x+1)^5(9x^2)$$

$$y' = 5(x+1)^4(3x^3+2) + (x+1)^5(9x^2)$$

Un poco agotador pero realizable

Método 3.

Siguiendo los pasos descritos en el esquema

$$\ln y = \ln(x+1)^5(3x^3+2)$$

$$\ln y = \ln(x+1)^5 + \ln(3x^3+2)$$

$$\ln y = 5\ln(x+1) + \ln(3x^3+2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5(x+1)'}{(x+1)} + \frac{(3x^3+2)'}{(3x^3+2)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{(x+1)} + \frac{9x^2}{(3x^3+2)}$$

$$y' = y \left[\frac{5}{(x+1)} + \frac{9x^2}{(3x^3+2)} \right]$$

$$y' = (x+1)^5(3x^3+2) \left[\frac{5}{(x+1)} + \frac{9x^2}{(3x^3+2)} \right]$$

3. Derivar $y = (x^2+3x-5)^3 \sqrt{3x^3-5} \sin(x)$

Método 1.

La resolución de este ejercicio con este método será ridículamente aburrida.

Método 2.

Cuando son 3 o más funciones este método queda obsoleto.

Método 3.

Siguiendo los pasos descritos en el esquema

$$\ln y = \ln(x^2+3x-5)^3 (3x^3-5)^{\frac{1}{2}} \sin(x)$$

$$\ln y = \ln(x^2+3x-5)^3 + \ln(3x^3-5)^{\frac{1}{2}} + \ln(\sin(x))$$

$$\begin{aligned}
 \ln y &= 3\ln(x^2 + 3x - 5) + \frac{1}{2}\ln(3x^3 - 5) + \ln(\operatorname{sen}(x)) \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{3(x^2 + 3x - 5)'}{(x^2 + 3x - 5)} + \frac{(3x^3 - 5)'}{2(3x^3 - 5)} + \frac{(\operatorname{sen}(x))'}{(\operatorname{sen}(x))} \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{3(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 5)} + \frac{9x^2}{2(3x^3 - 5)} + \frac{\cos x}{(\operatorname{sen}(x))} \\
 y' &= y \left[\frac{3(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 5)} + \frac{9x^2}{2(3x^3 - 5)} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x)} \right] \\
 y' &= (x^2 + 3x - 5)^3 \sqrt{3x^3 - 5} \operatorname{sen}(x) \left[\frac{3(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 5)} + \frac{9x^2}{2(3x^3 - 5)} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x)} \right]
 \end{aligned}$$



Comparado con su único rival π , e es la chica nueva del barrio. En tanto que π es más augusto y tiene un solemne pasado que se remonta a los babilonios, e no es tan lastrada por el peso de la historia. La constante e es juvenil, vibrante y siempre está presente cuando se trata de crecimiento. Resulta que en todo tipo de crecimiento está implicada e .

50 cosas que hay que saber sobre las MATEMÁTICAS

Ejercicios de aplicación

Fresita 1

Derivar la siguiente función:

$$y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{3x+2}}{(x^2+2)^2 (x-8)^5}$$

Solución.

$$\ln y = \ln \left[\frac{(x+1)^3 \sqrt{3x+2}}{(x^2+2)^2 (x-8)^5} \right]$$

$$\ln y = 3 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(x^2+2) - 5 \ln(x-8)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3(x+1)'}{(x+1)} + \frac{(3x+2)'}{2(3x+2)} - \frac{2(x^2+2)'}{(x^2+2)} - \frac{5(x-8)'}{(x-8)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{(x+1)} + \frac{5}{2(3x+2)} - \frac{2(2x)}{(x^2+2)} - \frac{5}{(x-8)}$$

$$y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt{3x+2}}{(x^2+2)^2 (x-8)^5} \left[\frac{3}{(x+1)} + \frac{5}{2(3x+2)} - \frac{4x}{(x^2+2)} - \frac{5}{(x-8)} \right]$$

Fresita 2

Derivar la siguiente función:

$$y = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos 2x}}{1+3 \ln x}$$

Solución.

$$\ln y = \ln \left[\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos 2x}}{1+3 \ln x} \right]$$

$$\ln y = \ln[\sqrt{\operatorname{sen} x \cos 2x}] - \ln[1+3 \ln x]$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln[\operatorname{sen} x \cos 2x] - \ln[1+3 \ln x]$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln[\operatorname{sen} x] + \frac{1}{2} \ln[\cos 2x] - \ln[1+3 \ln x]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(\operatorname{sen} x)'}{2(\operatorname{sen} x)} + \frac{(\cos 2x)'}{2(\cos 2x)} - \frac{(1+3 \ln x)'}{(1+3 \ln x)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{2(\operatorname{sen} x)} + \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{2(\cos 2x)} - \frac{1}{(1+3 \ln x)} \cdot \frac{3}{x}$$

$$y' = (y) \left(\frac{\cos x}{2(\operatorname{sen} x)} + \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{2(\cos 2x)} - \frac{1}{(1+3 \ln x)} \cdot \frac{3}{x} \right)$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos 2x}}{1+3 \ln x} \right) \left(\frac{\cos x}{2(\operatorname{sen} x)} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{(\cos 2x)} - \frac{3}{x(1+3 \ln x)} \right)$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos 2x}}{1+3 \ln x} \right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} 2x - \frac{3}{x(1+3 \ln x)} \right)$$

Fresita 3

Derivar la siguiente función:

$$y = x^{2^x} \operatorname{sen} x$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln[x^{2^x} \operatorname{sen} x] \\ \ln y &= \ln[x^{2^x}] + \ln[\operatorname{sen} x] \\ \ln y &= 2^x \ln[x] + \ln[\operatorname{sen} x] \\ \frac{y'}{y} &= (2^x)' \ln[x] + 2^x (\ln[x])' + \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)} \\ \frac{y'}{y} &= 2^x \ln 2 \ln x + 2^x \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)} \\ y' &= (y) \left(2^x \ln x^{\ln 2} + \frac{2^x}{x} + \operatorname{ctg} x \right) \\ y' &= (x^{2^x} \operatorname{sen} x) \left(2^x \ln x^{\ln 2} + \frac{2^x}{x} + \operatorname{ctg} x \right)\end{aligned}$$

Fresita 4

Derivar la siguiente función:

$$y^x = x^y$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y^x &= \ln[x^y] \\ x \ln y &= y \ln x \\ (x)' \ln y + x (\ln y)' &= (y)' \ln x + y (\ln x)' \\ \ln y + x \frac{1}{y} y' &= y' \ln x + y \frac{1}{x} \\ \frac{x}{y} y' - y' \ln x &= \frac{y}{x} - \ln y \\ y' \left(\frac{x}{y} - \ln x \right) &= \frac{y}{x} - \ln y \\ y' \left(\frac{x - y \ln x}{y} \right) &= \frac{y - x \ln y}{x} \\ y' &= \left(\frac{y}{x - y \ln x} \right) \times \frac{y - x \ln y}{x} \\ y' &= \frac{y(y - x \ln y)}{x(x - y \ln x)}\end{aligned}$$

Fresita 5

Derivar la siguiente función:

$$y = \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)^k$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left[\left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)^k \right] \\ \ln y &= k \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{k \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)'}{x + \sqrt{1 + x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{k}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} \right] \\ \frac{y'}{y} &= \frac{k}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right] \\ \frac{y'}{y} &= \frac{k}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right] \\ y' &= y \left(\frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ y' &= \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)^k \left(\frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \right)\end{aligned}$$

Fresita 6

Derivar la siguiente función:

$$y = \frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2 + 3}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left(\frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2 + 3} \right) \\ \ln y &= \ln \left(4^{\frac{1}{x}} \right) - \ln(x^2 + 3) \\ \ln y &= \frac{1}{x} \ln[4] - \ln(x^2 + 3) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{-1}{x^2} \ln 4 - \frac{(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{-\ln 4}{x^2} - \frac{2x}{(x^2 + 3)} \\ y' &= -(y) \left(\frac{\ln 4}{x^2} + \frac{2x}{(x^2 + 3)} \right) \\ y' &= - \left(\frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2 + 3} \right) \left(\frac{\ln 4(x^2 + 3) + 2x^3}{x^2(x^2 + 3)} \right) \\ y' &= \frac{-4^{\frac{1}{x}} [\ln 4(x^2 + 3) + 2x^3]}{x^2(x^2 + 3)^2}\end{aligned}$$

Fresita 7

Derivar la siguiente función:

$$y = \frac{\theta \sqrt{\sec \theta}}{\sec \theta}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left[\frac{\theta \sqrt{\sec \theta}}{\sec \theta} \right] \\ \ln y &= \ln[\theta \sqrt{\sec \theta}] - \ln[\sec \theta] \\ \ln y &= \ln[\theta] + \ln[\sec \theta]^{\frac{1}{2}} - \ln[\cos \theta]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln[\theta] + \frac{1}{2}\ln[\operatorname{sen}\theta] + \ln[\cos\theta] \\ \frac{y'}{y} &= \frac{(\theta)'}{\theta} + \frac{(\operatorname{sen}\theta)'}{2(\operatorname{sen}\theta)} + \frac{(\cos\theta)'}{(\cos\theta)} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{\theta} + \frac{\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta)} + \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)} \\ y' &= (y) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta)} + \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)} \right) \\ y' &= \left(\frac{\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{\sec\theta} \right) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{\cos\theta}{2(\operatorname{sen}\theta)} + \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)} \right) \\ y' &= \left(\frac{\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{\sec\theta} \right) \left(\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - 2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \right) \\ y' &= \left(\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - 2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} \right)\end{aligned}$$

Fresita 8

Derivar la siguiente función:

$$y = \operatorname{sen}\theta \left[\frac{1 - e^\theta}{1 + e^\theta} \right]$$

Solución.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left[\operatorname{sen}\theta \left(\frac{1 - e^\theta}{1 + e^\theta} \right) \right] \\ \ln y &= \ln[\operatorname{sen}\theta] + \ln \left[\frac{1 - e^\theta}{1 + e^\theta} \right] \\ \ln y &= \ln[\operatorname{sen}\theta] + \ln[1 - e^\theta] - \ln[1 + e^\theta] \\ \frac{y'}{y} &= \frac{(\operatorname{sen}\theta)'}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{(1 - e^\theta)'}{(1 - e^\theta)} - \frac{(1 + e^\theta)'}{(1 + e^\theta)} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{-e^\theta}{(1 - e^\theta)} - \frac{e^\theta}{(1 + e^\theta)} \\ \frac{y'}{y} &= \operatorname{ctg}\theta - \frac{e^\theta(1 - e^\theta) + e^\theta(1 + e^\theta)}{(1 - e^{2\theta})} \\ \frac{y'}{y} &= \operatorname{ctg}\theta - \frac{2e^\theta}{(1 - e^{2\theta})} \\ y' &= (y) \left(\operatorname{ctg}\theta - \frac{2e^\theta}{(1 - e^{2\theta})} \right) \\ y' &= \left(\operatorname{sen}\theta \left[\frac{1 - e^\theta}{1 + e^\theta} \right] \right) \left(\operatorname{ctg}\theta - \frac{2e^\theta}{(1 - e^{2\theta})} \right)\end{aligned}$$

Fresita 9

Derivar la siguiente función:

$$y = (tg2x)^{\frac{ctgx}{2}}$$

Solución.

$$\ln y = \ln \left[(tg2x)^{\frac{ctgx}{2}} \right]$$

$$\ln y = \frac{ctgx}{2} \cdot \ln(tg2x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} [(ctgx)'(\ln(tg2x)) + (ctgx)(\ln(tg2x))']$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[-csc^2 x \cdot (\ln(tg2x)) + (ctgx) \frac{(tg2x)'}{tg2x} \right]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[-csc^2 x \cdot \ln(tg2x) + (ctgx) \frac{2sec^2 2x}{tg2x} \right]$$

$$y' = \frac{y}{2} \left[-csc^2 x \ln(tg2x) + \frac{2ctgxsec^2 2x}{tg2x} \right]$$

$$y' = \frac{(tg2x)^{\frac{ctgx}{2}}}{2} \left[-csc^2 x \ln(tg2x) + \frac{2ctgxsec^2 2x}{tg2x} \right]$$

Fresita 10

Derivar la siguiente función:

$$y = \ln \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] + 2arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Solución.

Como ya describimos en un ejercicio anterior tenemos que simplificar la expresión (racionalizar) en este caso será del logaritmo.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{2x} \end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$y = \ln \left[\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{2x} \right] + 2arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$y = 2 \ln[(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})] - \ln[2x] + 2arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$y = 2 \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} - \frac{(2x)'}{2x} + \frac{2 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)'}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
y &= 2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} - \frac{2}{2x} + \frac{2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)}{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \\
y &= \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{(1+x)^{3/2}}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\
y &= \frac{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1-x^2}(2x)} - \frac{1}{x} + \frac{-2}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\
y &= \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(2x)} - \frac{1}{x} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(x)} - \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{x\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}(x)} = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}
\end{aligned}$$

Fresita 11

Derivar la siguiente función:

$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]$$

Solución.

En esta pregunta usaremos la propiedad:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4} [\ln[x^2 + x + 1] - \ln[x^2 - x + 1]] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right] \\
y' &= \frac{1}{4} \left[\frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} - \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} \right] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right)'}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$y' = \frac{1}{4} \left[\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{3x^2 + (1-x^2)^2} \cdot A$$

Se está realizando un cambio de variable porque no me alcanza la hoja.

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right)' = \frac{(\sqrt{3}x)'(1-x^2) - (\sqrt{3}x)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}(1-x^2) - \sqrt{3}x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}x}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{4} \left[\frac{2-2x}{x^4+x^2+1} \right] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{3x^2 + (1-x^2)^2} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}x}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x}{x^4+x^2+1} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1+x}{x^4+x^2+1} \right]$$

$$y' = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$

En la transformación del ángulo.

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{4x}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{4x^2-1}{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}x}{3}}{\frac{4-4x^2}{3}}$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}$$

Fresita 12

Derivar la siguiente función:

$$e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}} + \ln\left(\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}\right) = 8$$

Solución.

$$e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}} \left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}} \right)' + \frac{1}{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} \right)' = 0$$

$$\frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}} \sqrt{\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}} \left(\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} \right)' + \frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} \right)' = 0$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} \right)' \cdot \left[\frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}} \sqrt{\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}} + \frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}} \right] = 0$$

$$\frac{(x+\sqrt{y})'(x-\sqrt{y}) - (x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})'}{(x-\sqrt{y})^2} = 0$$

$$\left(1 + \frac{y'}{2\sqrt{y}} \right) (x-\sqrt{y}) - (x+\sqrt{y}) \left(1 - \frac{y'}{2\sqrt{y}} \right) = 0$$

$$(2\sqrt{y} + y')(x-\sqrt{y}) = (x+\sqrt{y})(2\sqrt{y} - y')$$

$$2x\sqrt{y} + xy' - 2y - \sqrt{y}y' = 2x\sqrt{y} - xy' + 2y - \sqrt{y}y'$$

$$2xy' = 4y$$

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Prueba de habilidades

Determine la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \frac{(x+2)^3 \sqrt{3x+5}}{(x^2+2)^3 (x-8)^5}$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{3}{x+2} + \frac{1}{3x+5} - \frac{6x}{x^2+2} - \frac{5}{x-8} \right]$$

$$y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} e^x}{1 + \ln x}$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x + x \ln x} \right]$$

$$y = x^{\sqrt{x}} (x^2 + x + 1)$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right]$$

$$y^{2x+8} = x^{y-5}$$

$$\text{Rpta. } \frac{y[y-5-2x \ln y]}{x[2x+8-y \ln x]}$$

$$y = (x \operatorname{tg}^2 x + 3)^k$$

$$\text{Rpta. } y k \operatorname{tg} x \left[\frac{\operatorname{tg} x + 2x \sec^2 x}{x \operatorname{tg}^2 x + 3} \right]$$

$$y^2 + y = \frac{4^x}{x^2 + 3} e^x$$

$$\text{Rpta. } \left(\frac{y^2 + y}{2y + 1} \right) \left[\ln 4 + 1 - \frac{2x}{x^2 + 3} \right]$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} \frac{1-x}{1+x^2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} + 2 \operatorname{ctg} 2x - \frac{2x}{1+x^2} \right]$$

$$\sqrt[y]{y} = x^{\sqrt{x}}$$

$$\text{Rpta. } \frac{y^2[2 + \ln x]}{2\sqrt{x}(1 - \ln y)}$$

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \right]$$

$$y = \sqrt{x \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{1 - e^x}}$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - \frac{e^x}{4(1 - e^x)} \right]$$

$$y = \sqrt{\frac{1 - \arccos x}{1 + \arccos x}}$$

$$\text{Rpta. } \frac{y}{(1 - \arccos^2 x) \sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = x^{x^x}$$

$$\text{Rpta. } x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right)$$

$$y = (x + x \operatorname{sen} x)^x$$

$$\text{Rpta. } y \left[1 + \ln(x + x \operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \right]$$

$$y = x^3 e^{x^2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{3}{x} + 2x + 2 \operatorname{ctg}(2x) \right]$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$$

$$\text{Rpta. } y \left[\frac{x^4 + 6x^2 + 1}{3x(1 - x^4)} \right]$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\text{Rpta. } 2 \sec^3 x$$

$$y = \arcsen(e^{\ln[\operatorname{sen}(2x+1)]})$$

$$\text{Rpta. } 2$$

Capítulo X

Derivadas de orden superior

Este capítulo extiende el estudio desde la primera derivada a la segunda y a las derivadas de orden n , destacando su significado y uso. La segunda derivada se interpreta como el cambio de la tasa de cambio y permite analizar concavidad, puntos de inflexión y criterios prácticos para identificar extremos. En aplicaciones físicas conecta con aceleración y, en órdenes superiores, con magnitudes como el “tirón” o variaciones más finas del movimiento. Se introduce además la aproximación local mediante polinomios de Taylor y la idea de estimar el error de aproximación, subrayando la importancia de la regularidad de las funciones (existencia y continuidad de derivadas) y la detección de puntos donde dichas propiedades fallan. Con estas herramientas, el análisis cualitativo y cuantitativo de funciones gana precisión y profundidad.

10.1. ¿Qué son las derivadas de orden superior?

Cuando por fin dominas la derivación y piensas que el cálculo diferencial es sencillo, aparece la segunda derivada y complica el panorama. Luego llegan la tercera, la cuarta y, en general, la n -ésima derivada. Tranquilo: no es tan terrible. El método es el mismo de siempre—derivar sucesivamente con orden y cuidado.

Ejemplos de aplicación:

Manguito 1. Teniendo la expresión:

$$y = 5x^3 + 3x^2 + 18$$

Determine la derivada:

$$y' = 15x^2 + 6x$$

De la expresión anterior encuentre su derivada

$$\begin{aligned}(y')' &= (15x^2 + 6x)' \\ y'' &= 30x\end{aligned}$$

De la expresión anterior encuentre su derivada

$$\begin{aligned}(y'')' &= (30x)' \\ y''' &= 30\end{aligned}$$

De la expresión anterior encuentre su derivada

$$(y''')' = (30)'$$

$$y^{iv} = 0$$

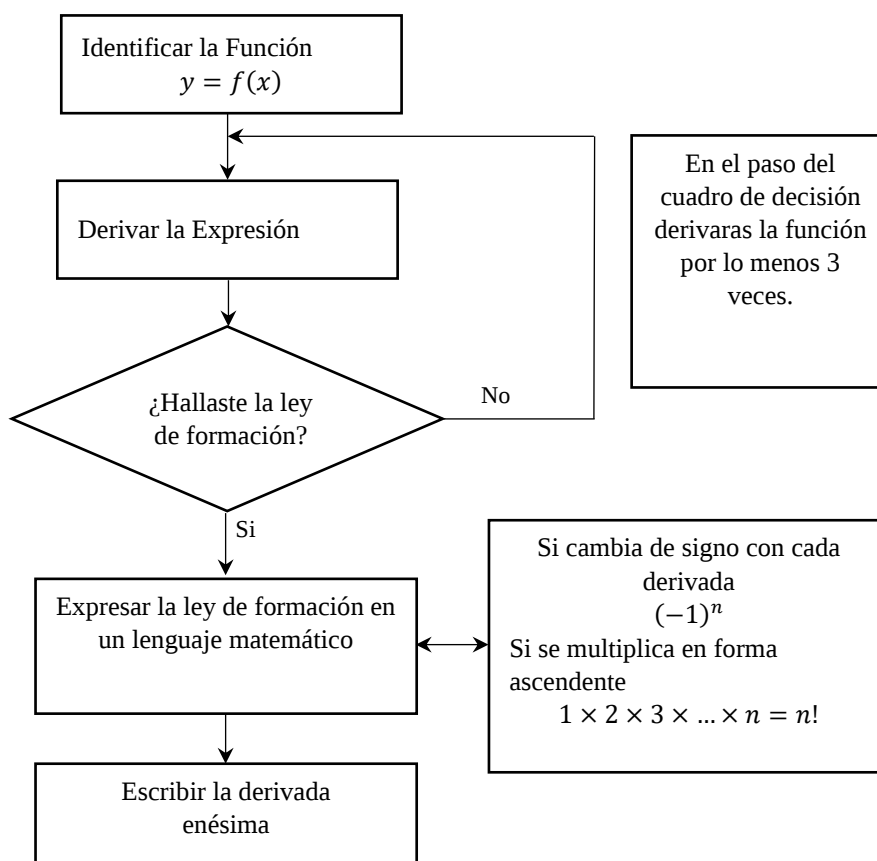
A partir de aquí, las derivadas sucesivas de la función resultan cero.

¿Qué observamos en el “manguito”?

- En el miembro izquierdo, solo cambian los exponentes.
- En el miembro derecho, se derivan las expresiones aplicando las reglas ya definidas.

Con esto, ya puedes obtener la segunda, tercera y, en general, la n -ésima derivada. Este es un ejercicio clásico denominado cálculo de la derivada enésima. Para resolverlo, trabajaremos con dos enfoques principales:

1. Método de inducción (el diagrama explica el procedimiento para calcular $f^{(n)}$)
2. Reconocimiento de patrón y fórmula general (derivar varias veces, identificar la regularidad y enunciar la expresión de $f^{(n)}$)



10.2. ¿Aplicaciones de las derivadas de orden superior?

¿Son importantes? Por supuesto. Comprenderlas es clave porque permiten:

- Determinar máximos y mínimos (criterio de la segunda derivada).

- Interpretar magnitudes físicas como la aceleración (segunda derivada de la posición).
- Construir aproximaciones mediante series de Taylor, entre otras aplicaciones.

10.3. Método de Leibniz para la derivada enésima

Este método, de carácter más mecánico, se emplea para derivar el producto de dos funciones (y puede generalizarse). Requiere conocer o poder obtener las derivadas de orden k de cada factor; luego se sustituyen en la fórmula. Es análogo al binomio de Newton:

Sea la función: $y = u(x) \cdot v(x)$

$$\frac{d^n}{dx^n} = \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [u(x)] \cdot \frac{d^k}{dx^k} [v(x)]$$

Otra forma de representar será:

$$y^n = u^n v + C_1^n u^{n-1} v' + C_2^n u^{n-2} v'' + \dots + C_{n-1}^n u' v^{n-1} + u v^n$$

Donde:

u^n es la derivada "enésima de u ".

v^n es la derivada "enésima de v ".

u^{n-1} es la derivada enésima-1 de así sucesivamente.

C_k^n es la combinacion k grupos de n .

Ejercicios de aplicación

Manguito 1

Hallar la segunda derivada de la función:

$$y = \frac{4-x}{4+x}$$

Solución:

$$y = \frac{4-x}{4+x}$$

$$y' = \frac{(4-x)'(4+x) - (4-x)(4+x)'}{(4+x)^2}$$

$$y' = \frac{(-1)(4+x) - (4-x)(1)}{(4+x)^2}$$

$$y' = \frac{-4-x-4+x}{(4+x)^2}$$

$$y' = \frac{-8}{(4+x)^2} \text{ esta es la primera derivada}$$

$$y' = \frac{-8}{(4+x)^2} = -8(4+x)^{-2}$$

$$(y')' = [-8(4+x)^{-2}]'$$

$$y'' = 16(4+x)^{-3}(4+x)'$$

$$y'' = 16(4+x)^{-3} = \frac{16}{(4+x)^3}$$

Manguito 2

Hallar la segunda derivada de la función:

$$y = (x^3 + 1)^6$$

Solución:

$$y = (x^3 + 1)^6$$

$$y' = 6(x^3 + 1)^5(x^3 + 1)'$$

$$y' = 6(x^3 + 1)^5(3x^2)$$

$$y' = 18x^2(x^3 + 1)^5 \text{ para derivar usaremos regla del producto}$$

$$y'' = (18x^2)'[(x^3 + 1)^5] + (18x^2)[(x^3 + 1)^5]'$$

$$y'' = 36x(x^3 + 1)^5 + (18x^2)[5(x^3 + 1)^4(x^3 + 1)']$$

$$y'' = 36x(x^3 + 1)^5 + (18x^2)[5(x^3 + 1)^4(3x^2)]$$

$$y'' = 36x(x^3 + 1)^5 + 270x^4(x^3 + 1)^4$$

$$y'' = 36x(x^3 + 1)^5 + 270(x^4 + x)^4$$

Manguito 3

Hallar la tercera derivada de la función:

$$y = \cos^2 x$$

Solución:

$$y = \cos^2 x \text{ reconocer la función compuesta}$$

$$y' = 2\cos x(\cos x)' \text{ por regla de la cadena}$$

$$y' = -2\cos x \sin x \text{ por conveniencia usaremos ángulo doble}$$

$$y' = -\sin 2x$$

$$y'' = -\cos 2x(2x)'$$

$$y'' = -2\cos 2x$$

$$y''' = 4\operatorname{sen}2x$$

Es muy importante conocer las fórmulas trigonométricas para evitar procesos innecesarios.

Manguito 4

Hallar $y'''(1/3)$:

$$y = e^{3x-1}$$

Solución.

$y = e^{3x-1}$ reconocer la función compuesta

$y' = e^{3x-1}(3x-1)'$ por regla de la cadena

$$y' = 3e^{3x-1}$$

$$y'' = 3e^{3x-1}(3x-1)'$$

$$y'' = 9e^{3x-1}$$

$$y''' = 27e^{3x-1}$$

Reemplazamos en la nueva expresión.

$$y'''(1/3) = 27e^{3(\frac{1}{3})-1} = 27$$

Manguito 5

Hallar $y''(0)$:

$$y = a^{\operatorname{sen}2x}$$

Solución:

$y = a^{\operatorname{sen}2x}$ reconocer la función compuesta

$y' = a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(\operatorname{sen}2x)'$ por regla de la cadena

$y' = a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(2\cos2x)$ derivamos “regla del producto”

$$y'' = [a^{\operatorname{sen}2x}\ln a]'(2\cos2x) + a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(2\cos2x)'$$

$$y'' = a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(2\cos2x)(2\cos2x) + a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(-4\operatorname{sen}2x)$$

$$y'' = a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(4\cos^2 2x) - a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)(4\operatorname{sen}2x)$$

$$y'' = 4a^{\operatorname{sen}2x}(\ln a)[\cos^2 2x - \operatorname{sen}2x]$$

Reemplazamos en la nueva expresión.

$$y''(0) = 4a^{\operatorname{sen}[2(0)]}(\ln a)[\cos^2[2(0)] - \operatorname{sen}[2(0)]]$$

$$y''(0) = 4a^{\operatorname{sen}0}(\ln a)[\cos^2 0 - \operatorname{sen} 0]$$

$$y''(0) = 4a^0(\ln a)[(1)^2 - 0]$$

$$y''(0) = 4(\ln a)[(1)^2 - 0] = 4\ln a$$

Manguito 6

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \operatorname{sen}^2 x$$

Solución:

$$y' = 2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x)'$$

$$y' = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$y' = \operatorname{sen}2x = 2^0\operatorname{sen}2x$$

$$y'' = \cos2x(2x)'$$

$$y'' = 2\cos2x = 2^1\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -4\operatorname{sen}2x = -2^2\operatorname{sen}2x = 2^2\operatorname{sen}\left(2x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$y'' = -8\cos 2x = -2^3 \cos 2x = 2^3 \operatorname{sen} \left(2x + 3 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\therefore y^n = 2^{n-1} \operatorname{sen} \left(2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right)$$

Manguito 7

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{1}{ax + b}$$

Solución:

$$y = \frac{1}{ax + b} \Rightarrow y = (ax + b)^{-1}$$

$$y' = -(ax + b)^{-2} (ax + b)'$$

$$y' = -(ax + b)^{-2} (a) = (-1)^1 a (ax + b)^{-2} *$$

$$y'' = 2a(ax + b)^{-3} (ax + b)' = 2a(ax + b)^{-3} (a)$$

$$y'' = (-1)^2 (1 \times 2) a^2 (ax + b)^{-3} **$$

$$y''' = -6a^2(ax + b)^{-4} (ax + b)' = -6a^2(ax + b)^{-4} (a)$$

$$y''' = (-1)^3 (1 \times 2 \times 3) a^3 (ax + b)^{-4} ***$$

$$y'' = 24a^3(ax + b)^{-5} (ax + b)' = 24a^3(ax + b)^{-5} (a)$$

$$y'' = (-1)^4 (1 \times 2 \times 3 \times 4) a^4 (ax + b)^{-5} ****$$

$$\therefore y^n = (-1)^n (n!) a^n (ax + b)^{-n-1}$$

Siempre que el signo alterna en cada derivada se pondrá el factor $(-1)^n$ si la primera derivada es negativa “n” será único exponente, si es la segunda derivada negativa entonces a “n” se le aumentará 1.

Manguito 8

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \ln(ax + b)$$

Solución:

$$y' = \frac{(ax + b)'}{(ax + b)} = \frac{a}{ax + b} = a(ax + b)^{-1}$$

$$y' = (-1)^2 a(ax + b)^{-1} *$$

$$y' = -a(ax + b)^{-2} (ax + b)' = -a(ax + b)^{-2} (a)$$

$$y'' = (-1)^3 (1) a^2 (ax + b)^{-2} **$$

$$y''' = 2a^2(ax + b)^{-3} (ax + b)' = 2a^2(ax + b)^{-3} (a)$$

$$y''' = (-1)^4 (1 \times 2) a^3 (ax + b)^{-3} ***$$

$$y'' = -6a^3(ax + b)^{-4} (ax + b)' = -6a^3(ax + b)^{-4} (a)$$

$$y'' = (-1)^5 (1 \times 2 \times 3) a^4 (ax + b)^{-5} ****$$

$$\therefore y^n = (-1)^{n+1} (n-1)! a^n (ax + b)^{-n}$$

Manguito 9

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

Para resolver este ejercicio descomponemos la fracción original con el método de fracciones parciales.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

Resolveremos por límites:

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos los coeficientes:

$$y = \frac{1/2}{x + 1} + \frac{1/2}{x - 1} = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{2}(x - 1)^{-1}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(x + 1)^{-2} - \frac{1}{2}(x - 1)^{-2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}(1 \times 2)(x + 1)^{-3} + \frac{1}{2}(1 \times 2)(x - 1)^{-3}$$

$$y''' = -\frac{1}{2}(1 \times 2 \times 3)(x + 1)^{-4} - \frac{1}{2}(1 \times 2 \times 3)(x - 1)^{-4}$$

$$\therefore y^n = \frac{(-1)^n}{2}(n!)(x + 1)^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{2}(n!)(x - 1)^{-n-1}$$

$$y^n = \frac{(-1)^n}{2}(n!)[(x + 1)^{-n-1} + (x - 1)^{-n-1}]$$

Manguito 10

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

Solución:

En este caso no es necesario descomponer la fracción solo aplicaremos la regla del producto.

$$y' = \frac{(1 - x)'(1 + x) - (1 - x)(1 + x)'}{(1 + x)^2}$$

$$y' = \frac{-1(1 + x) - (1 - x) \times 1}{(1 + x)^2} = \frac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2}$$

$$y' = \frac{-2}{(1 + x)^2} = -2(1 + x)^{-2} = (-1)^1(2)(1 + x)^{-2}$$

$$y'' = 4(1 + x)^{-3} = (-1)^2(2)(1 \times 2)(1 + x)^{-3}$$

$$y''' = -12(1 + x)^{-4} = (-1)^3(2)(1 \times 2 \times 3)(1 + x)^{-4}$$

$$y^{iv} = 48(1 + x)^{-5} = (-1)^4(2)(1 \times 2 \times 3 \times 4)(1 + x)^{-5}$$

$$y^n = (-1)^n 2n! (1 + x)^{-n-1}$$

Manguito 11

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = (ax + b)^n$$

Solución:

$$y' = n(ax + b)^{n-1}(ax + b)' = n(ax + b)^{n-1}(a)$$

$$y' = na(ax + b)^{n-1} *$$

$$y'' = n(n - 1)a(ax + b)^{n-2}(ax + b)'$$

$$y'' = n(n - 1)a(ax + b)^{n-2}(a)$$

$$y'' = n(n - 1)a^2(ax + b)^{n-2} **$$

$$y''' = n(n - 1)(n - 2)a^2(ax + b)^{n-3}(ax + b)'$$

$$y''' = n(n - 1)(n - 2)a^3(ax + b)^{n-3} ***$$

De las tres derivadas halladas concluimos que:

$$y^n = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1 (ax+b)^{n-n} (a^n)$$

$$y^n = n! a^n (ax+b)^0$$

$$\therefore y^n = n! a^n$$

Manguito 12

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = e^{ax+b}$$

Solución:

$$y' = e^{ax+b} (ax+b)' = e^{ax+b} (a)$$

$$y' = a e^{ax+b} *$$

$$y'' = a e^{ax+b} (ax+b)' = a e^{ax+b} (a)$$

$$y'' = a^2 e^{ax+b} **$$

$$y''' = a^2 e^{ax+b} (ax+b)' = a^2 e^{ax+b} (a)$$

$$y''' = a^3 e^{ax+b} ***$$

De las tres derivadas halladas concluimos que:

$$y^n = a^n e^{ax+b}$$

Manguito 13

Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \sqrt{ax+b}$$

Solución:

$$y = \sqrt{ax+b} = (ax+b)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (ax+b)^{-\frac{1}{2}} (ax+b)' = \frac{1}{2} (ax+b)^{-\frac{1}{2}} (a)$$

$$y' = \frac{1}{2} a (ax+b)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^2}{2^1} a (ax+b)^{-\frac{1}{2}} *$$

$$y'' = \frac{-1}{4} a (ax+b)^{-\frac{3}{2}} (ax+b)' = \frac{-1}{4} a (ax+b)^{-\frac{3}{2}} (a)$$

$$y'' = \frac{-1}{4} (ax+b)^{-\frac{3}{2}} a^2 = \frac{(-1)^3}{2^2} (ax+b)^{-\frac{3}{2}} a^2 **$$

$$y''' = \frac{3}{8} (ax+b)^{-\frac{5}{2}} a^2 (ax+b)' = \frac{3}{8} (ax+b)^{-\frac{5}{2}} a^2 (a)$$

$$y''' = \frac{3}{8} (ax+b)^{-\frac{5}{2}} a^3 = \frac{(-1)^4 (1 \times 3)}{2^3} (ax+b)^{-\frac{5}{2}} a^3 ***$$

$$y^{iv} = \frac{-15}{16} (ax+b)^{-\frac{7}{2}} a^3 = \frac{(-1)^5 (1 \times 3 \times 5)}{2^4} (ax+b)^{-\frac{7}{2}} a^4$$

De las tres derivadas halladas concluimos que:

Para un “ $n \geq 2$ ”

$$y^n = \frac{(-1)^{n+1} [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)]}{2^n} (ax+b)^{-n+\frac{1}{2}} a^n$$

Manguito 14

Derivar la siguiente función usando la fórmula de Leibniz

$$y = x e^x$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} u = x & v = e^x \\ u' = 1 & v' = e^x \\ u'' = 0 & v'' = e^x \\ u''' = 0 & v''' = e^x \\ u^n = 0 & v^n = e^x \end{array}$$

Aplicamos la fórmula de Leibniz

$$y^n = u^n v + C_1^n u^{n-1} v' + C_2^n u^{n-2} v'' + \dots + C_{n-1}^n u' v^{n-1} + u v^n$$

$$y^n = 0 + C_1^n(0)(e^x) + C_2^n(0)v^2 + \dots + n(1)e^x + x e^x$$

$$y^n = 0 + 0 + 0 + \dots + n e^x + x e^x = n e^x + x e^x$$

$$y^n = e^x(n + x)$$

Manguito 15

En la pregunta anterior nos convenía que el exponencial fuese el u

Derivar la siguiente función usando la fórmula de Leibniz

$$y = x^2 e^{3x}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} u = e^{3x} & v = x^2 \\ u' = 3e^{3x} & v' = 2x \\ u'' = 3^2 e^{3x} & v'' = 2 \\ u''' = 3^3 e^{3x} & v''' = 0 \\ u^n = 3^n e^{3x} & v^n = 0 \end{array}$$

Aplicamos la fórmula de Leibniz

$$y^n = u^n v + C_1^n u^{n-1} v' + C_2^n u^{n-2} v'' + \dots + C_{n-1}^n u' v^{n-1} + u v^n$$

$$y^n = 3^n e^{3x} x^2 + C_1^n [3^{n-1} e^{3x}] 2x + C_2^n [3^{n-2} e^{3x}] 2 + 0 + \dots + 0$$

$$y^n = 3^n e^{3x} x^2 + n [3^{n-1} e^{3x}] 2x + \frac{n(n-1)}{2} [3^{n-2} e^{3x}] 2$$

Manguito 16

Derivar la siguiente función usando la fórmula de Leibniz

$$y = x^3 \ln x$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & v = x^3 \\ u' = x^{-1} & v' = 3x^2 \\ u'' = -1x^{-2} & v'' = 6x \\ u''' = 2x^{-3} & v''' = 6 \\ u^n = (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n} & v^n = 0 \end{array}$$

Aplicamos la fórmula de Leibniz

$$y^n = u^n v + C_1^n u^{n-1} v' + C_2^n u^{n-2} v'' + \dots + C_{n-1}^n u' v^{n-1} + u v^n$$

$$y^n = u^n v + C_1^n u^{n-1} v' + C_2^n u^{n-2} v'' + C_3^n u^{n-3} v''' + 0$$

$$u^n v = (-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n} x^3 = \frac{3(-1)^{n+1} n!}{n x^{n-3}}$$

$$\begin{aligned}
C_1^n u^{n-1} v' &= n(-1)^n (n-2)! x^{-n-1} 3x^2 = \frac{3(-1)^n n!}{(n-1)x^{n-1}} \\
C_2^n u^{n-2} v'' &= (-1)^{n-1} (n-3)! x^{-n-2} 6x = \frac{6(-1)^{n-1} n!}{(n-2)x^{n+1}} \\
C_3^n u^{n-3} v''' &= (-1)^{n-2} (n-4)! x^{-n-3} 6 = \frac{6(-1)^{n-2} n!}{(n-3)x^{n+1}} \\
y^n &= 6 \frac{(-1)^n (n-4)!}{x^{n-3}} \text{ para un } n \geq 4
\end{aligned}$$

Sí, lo sé: quieres saber qué pasó. La operación resulta demasiado extensa; por ello optamos por factorizar, extrayendo el factor común de los términos y, cuando correspondía, el de menor exponente. Si deseas, puedes desarrollarla completa, pero te adelanto que es bastante laboriosa.

Prueba de habilidades

1.- Hallar la segunda derivada de la función:

$$y = \frac{3-x}{3+x} \quad \text{Rpta. } \frac{-6}{(x+3)^2}$$

2.- Hallar la segunda derivada de la función:

$$y = e^{x^2} \quad \text{Rpta. } e^{x^2}(4x^2 + 2)$$

3.- Hallar la segunda derivada de la función para $x = \sqrt{e-1}$:

$$y = \ln(x^2 - 1) \quad \text{Rpta. } \frac{2}{e-2} - \frac{e-1}{(e-2)^2}$$

4.- Hallar $y'''(3)$:

$$y = (2x-3)^5 \quad \text{Rpta. } 4320$$

5.- Hallar y''' :

$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \quad \text{Rpta. } 6$$

6.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} \quad \text{Rpta. } \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+1/3}}; n \geq 2$$

7.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{1}{1-x-2x^2} \quad \text{Rpta. } \frac{n!}{3} [2^{n+1} + (-1)^n]$$

8.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = 2 \ln(x+b) \quad \text{Rpta. } \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{(x+b)^n}$$

9.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = x^{n-1} \ln x \quad \text{Rpta. } \frac{(n-1)!}{x}$$

10.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{Rpta. } \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

11.-Encontrar la derivada “n-ésima”

$$y = (1-x^2) \cos x$$

$$\text{Rpta. } (1-x^2) \cos \left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx \cos \left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1) \cos \left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

Capítulo XI

Interpretación geométrica de la derivada

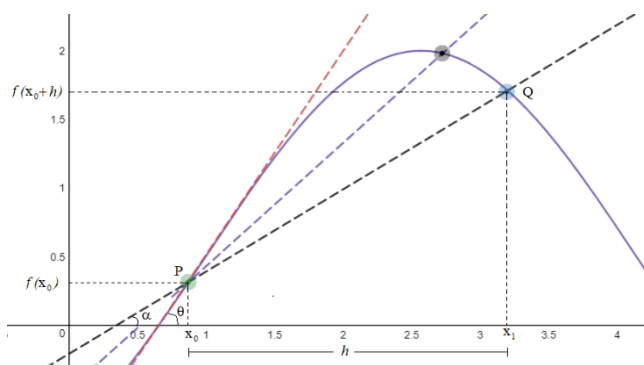
Este capítulo traduce la derivada al lenguaje de las figuras: la pendiente de la tangente en un punto, la recta normal asociada y el comportamiento local de la curva. Verás cómo el signo de la derivada describe crecimiento o decrecimiento, y cómo sus ceros y cambios de signo revelan máximos y mínimos. Con la segunda derivada interpretamos la concavidad y los puntos de inflexión, claves para esbozar curvas con criterio y detectar asíntotas o cambios de forma. Integramos estas ideas en un método práctico de análisis y trazado de funciones, útil para resolver problemas de optimización y para comprender fenómenos físicos a partir de sus gráficas.

11.1. Recta tangente y normal

El problema de hallar la “pendiente” de una curva en un punto P , se reduce a las aproximaciones mediante rectas que pasan por P y otro punto de la curva, por ejemplo Q . Entonces, la función:

$$y = f(x) \text{ y sean } P(x_0, f(x_0)) \text{ y } Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Dos puntos de la gráfica.



Por propiedad conocemos que la pendiente de la recta secante es:

$$m_1 = \operatorname{tg} \theta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Suponiendo que P es un punto fijo y Q es un punto de la curva que se desplaza hacia P de forma que si:

$$x \rightarrow x_0, \text{ implica, } h = (x_1 - x_0) \rightarrow 0$$

11.2. Máximos, mínimos y aplicaciones físicas

Al realizar este proceso, la pendiente de la recta secante m_1 tiende a transformarse en la pendiente “m” de la tangente y así el ángulo θ llega a convertirse en el ángulo α , es decir, $tg\theta = tg\alpha$ cuando $h \rightarrow 0$, escrita de una forma matemática sería:

$$tg\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} tg\theta$$

$$m = tg\alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para resolver este tipo de preguntas primero recordemos ciertas formulas:

Ecuación de la recta: $y = mx + b$.

m = pendiente y b = desfase

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$m_1 = m_2$$

Dos rectas son ortogonales si el producto de sus pendientes es -1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

El ángulo entre dos curvas será:

$$tg\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Ejercicios de aplicación

Sandia 1

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^2 + 3x + 5$ en el punto $P(2,15)$.

Solución:

Nos piden ecuación de la recta tangente, para eso necesitamos la pendiente y un punto de paso; lo segundo lo tenemos solo faltaría hallar la pendiente.

$$\text{Pendiente} = m = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 5)$$

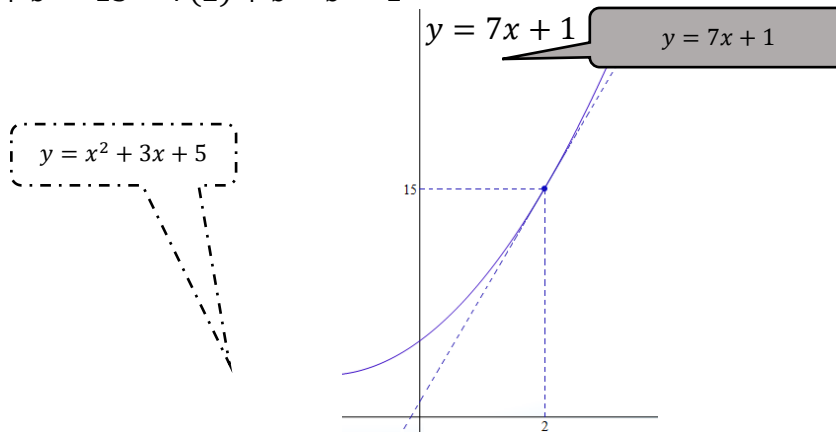
$m = 2x + 3$ evaluamos para el punto pedido $x = 2$

$m = 7$ Solo nos queda reemplazar en la ecuación de la recta.

$$y = mx + b \Rightarrow y = 7x + b$$

Calculamos el desfase con el punto $P(2,15)$

$$y = 7x + b \Rightarrow 15 = 7(2) + b \therefore b = 1$$



Sandia 2

Determine la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 + 5x + 5$ en el punto $P(1,11)$.

Solución:

Nos piden ecuación de la recta normal, para eso necesitamos la pendiente y un punto de paso; lo segundo lo tenemos solo faltaría hallar la pendiente.

$$\text{Pendiente} = m = \frac{d}{dx}(x^3 + 5x + 5)$$

$m = 3x^2 + 5$ evaluamos para el punto pedido $x = 1$

$m = 8$ Sin embargo, ésta pendiente es de la recta tangente, pero nos pide la normal; para hallar la pendiente de la recta normal.

$$m_N = \frac{-1}{m_T} \Rightarrow m_N = \frac{-1}{8}$$

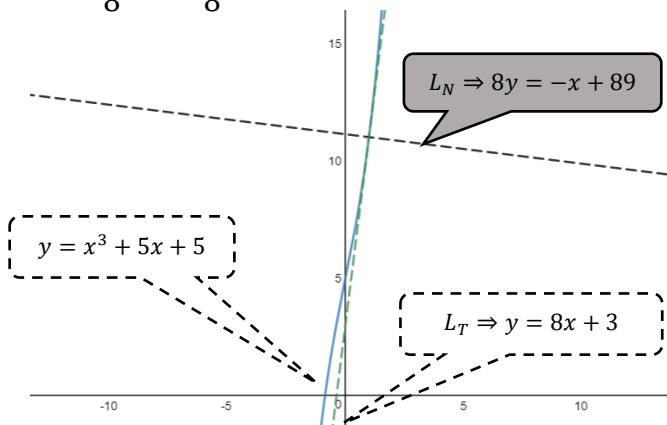
Listo solo reemplazamos

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{-1}{8}x + b$$

Calculamos el desfase con el punto $P(1,11)$

$$y = \frac{-1}{8}x + b \Rightarrow 11 = \frac{-1}{8}(1) + b \therefore b = \frac{89}{8}$$

$$y = \frac{-1}{8}x + \frac{89}{8} \Rightarrow 8y = -x + 89$$



Sandia 3

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$x^2 + y^2 + 2y = 8 \text{ en } x = \sqrt{5}$$

Solución:

En esta pregunta hallaremos la pendiente con ayuda de la derivada implícita recuerda $m = y'$.

$$2x + 2yy' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y+1}$$

Para determinar la pendiente necesitamos el punto de paso; tenemos “x” tendremos que hallar “y”.

Reemplazamos $x = \sqrt{5}$ en la ecuación.

$$x^2 + y^2 + 2y = 8 \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \text{ donde obtendremos.}$$

$$y = 1 \quad \wedge \quad y = -3$$

Por lo cual obtendremos dos rectas tangentes

Reemplazamos los puntos para hallar la pendiente

Punto $P(\sqrt{5}, 1)$

$$y' = \frac{-x}{y+1} \Rightarrow m_1 = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{-\sqrt{5}}{2}x + b$$

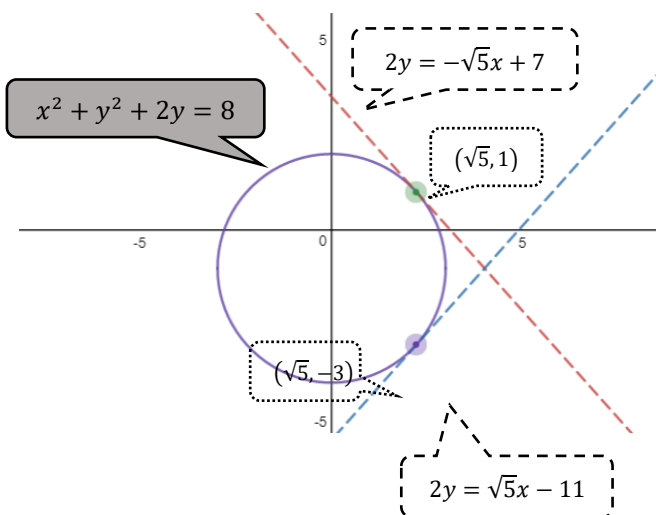
$$\text{Hallando el desfase } 1 = \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{5} + b \Rightarrow b = 7/2$$

La ecuación de la recta será:

$$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow 2y = -\sqrt{5}x + 7$$

Para el punto $P(\sqrt{5}, -3)$ su ecuación será:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{11}{2} \Rightarrow 2y = \sqrt{5}x - 11$$



Sandia 4

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$

Solución:

Llevando a una forma conocida a la ecuación de la recta:

$$8x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 8x + 3 \Rightarrow m_1 = 8$$

Donde obtenemos que la pendiente es 8.

$$y = 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = 4x \Rightarrow m_2 = 4x$$

Para que dos rectas sean paralelas sus pendientes deben de ser iguales o proporcionales.

$$\text{Es decir: } m_1 // m_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$\therefore 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

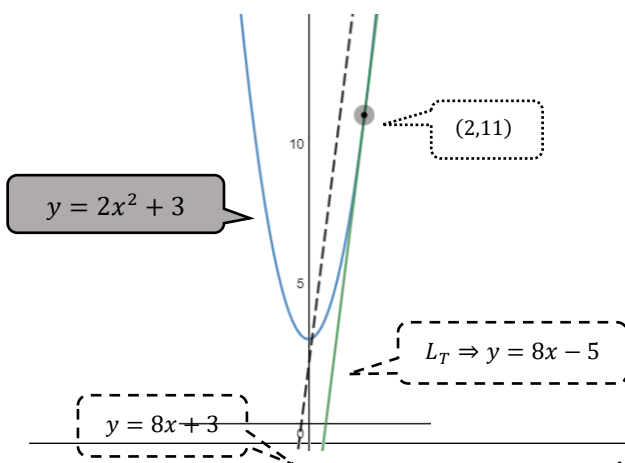
Creando el punto de paso con $x = 2$

$$y = 2x^2 + 3 \Rightarrow y = 2(2)^2 + 3 \therefore y = 11; \text{El punto } P = (2, 11)$$

Terminando la ecuación: $y = mx + b$

$$y = 8x + b \Rightarrow 11 = 8(2) + b \therefore b = -5$$

La ecuación será: $y = 8x - 5$



Sandia 5

Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $2x + 18y = 9$

Solución:

Llevando a una forma conocida a la ecuación de la recta:

$$2x + 18y = 9 \Rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{9}$$

Donde obtenemos que la pendiente es $-1/9$.

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow m_2 = 3x^2 - 3$$

Sin embargo, esto es de la tangente, para la normal.

$$m_N = \frac{-1}{m_2} \Rightarrow m_N = \frac{-1}{3x^2 - 3}$$

Requisito para que sean paralelas $m_N // m_1 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$$\therefore \frac{-1}{3x^2 - 3} = -\frac{1}{9} \Rightarrow 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

Creando el punto de paso con $x = 2$:

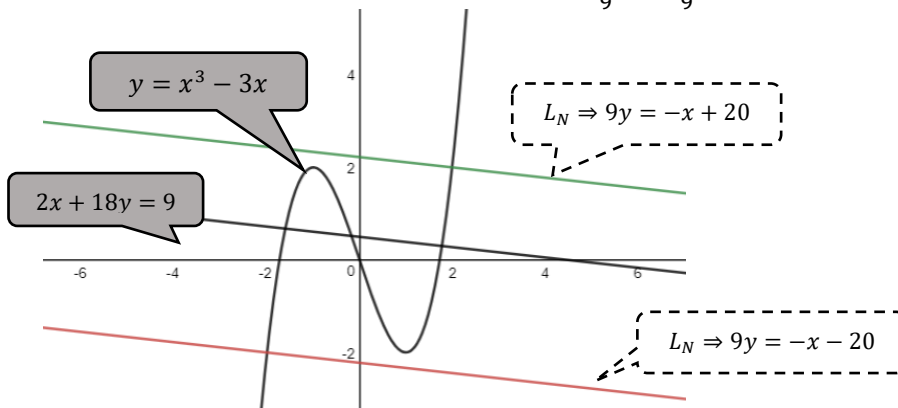
$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y = 2^3 - 3(2) \therefore y = 2; \quad P = (2, 2)$$

De aquí sacamos la ecuación:

$$y = -\frac{1}{9}x + b \Rightarrow 2 = -\frac{1}{9}(2) + b \therefore b = \frac{20}{9}$$

$$\text{La ecuación será: } y = -\frac{1}{9}x + \frac{20}{9}$$

$$\text{De la misma forma con } x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{9}x - \frac{20}{9}$$

**Sandia 6**

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva:

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ en el punto } P(2, 4)$$

Solución:

Sea (a, b) el punto de tangencia.

Hallamos la pendiente de la circunferencia.

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y} \text{ con el punto}$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

Por otro lado, la pendiente de la tangente que pasa por $(2, 4)$ y (a, b) es:

$$m = \frac{4-b}{2-a} \text{ igualando las pendientes}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{4-b}{2-a} \Rightarrow -2a + a^2 = 4b - b^2$$

$$a^2 + b^2 = 4b + 2a \dots I$$

Como el punto (a, b) está en la circunferencia:

$$a^2 + b^2 = 9 \dots II$$

De I y II: $9 = 4b + 2a \dots III$

$$a = \frac{9-4b}{2} \Rightarrow \left(\frac{9-4b}{2}\right)^2 + b^2 = 9$$

$$81 - 72b + 16b^2 + 4b^2 = 36 \Rightarrow 20b^2 - 72b + 45 = 0$$

$$b = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 4 \cdot 20 \cdot 45}}{40} \Rightarrow b_1 = 2.79 \text{ y } b_2 = 0.8$$

Reemplazando en III: $a_1 = -1.08$ y $a_2 = 2.9$

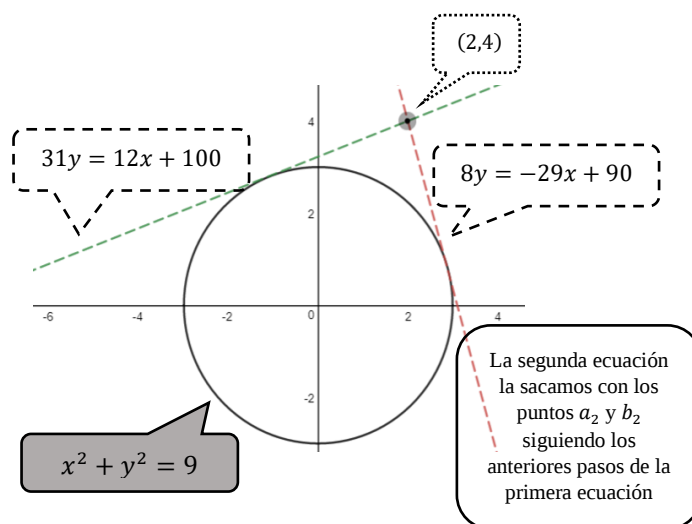
Ecuación 1:

$$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{-1.08}{2.79} = \frac{12}{31} \text{ punto de paso } P(2,4)$$

$$y = mx + b \Rightarrow 4 = \frac{12}{31}(2) + b \therefore b = \frac{100}{31}$$

La ecuación será:

$$y = \frac{12}{31}x + \frac{100}{31} \text{ ó } 31y = 12x + 100$$



Bibliografía

- Ayres, F., & Mendelson, E. (1991). Cálculo diferencial e integral. McGraw-Hill.
- Bronshtein, I., & Semendiaev, K. (1982). Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes. MIR.
- Cantoral Uriza, Ricardo; Fafán Márquez, Rosa María, (2004). Desarrollo Conceptual del Cálculo. International Thomson Editores. México, D.F.
- Efimenko, V., Lunts, G., Frolov, S., & Yanpolski, A. (1986). Problemas y ejercicios de análisis matemático. Latinoamericana.
- Espinoza Ramos, E. (2009). Análisis matemático I. EDUKPERU.
- Figuerola García, R. (2015). Análisis matemático 1. Ediciones RFG
- Georgii Nikolai, B. (1977). Problemas y ejercicios de análisis matemático. MIR.
- Gil Sevilla, J. L., & Díaz Téllez, R. (2013). Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias. Pearson.
- Granville, W., (1904). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial UTEHA.
- Guerreiro, C. (s. f.). Cálculo I. Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca Central.
- Larson, Roland E. Hostetler, Robert P. Edwards, Bruce H., (1995). Cálculo, volumen 1. Quinta Edición. Editorial McGraw-Hill. México, D.F.
- Larson, R., & Edwards, B. (2010). Cálculo de una variable. McGraw-Hill.
- Piedra Vilchez, Cesar, (2015). Introducción al Cálculo. Editorial Macro. Lima, Perú.
- Piskunov, N. (1977). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. MIR.
- Rubio Perilla, Marcelo. Dueñas Ruiz, Herbert, (2006). Cálculo I. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.
- Stewart, James, (2001). Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición. International Thomson Editores. México, D.F.
- Stewart, James, (2012). Cálculo. Trascendentes Tempranas. Séptima Edición. Cengage Learning.





ISBN: 978-612-49706-7-2

