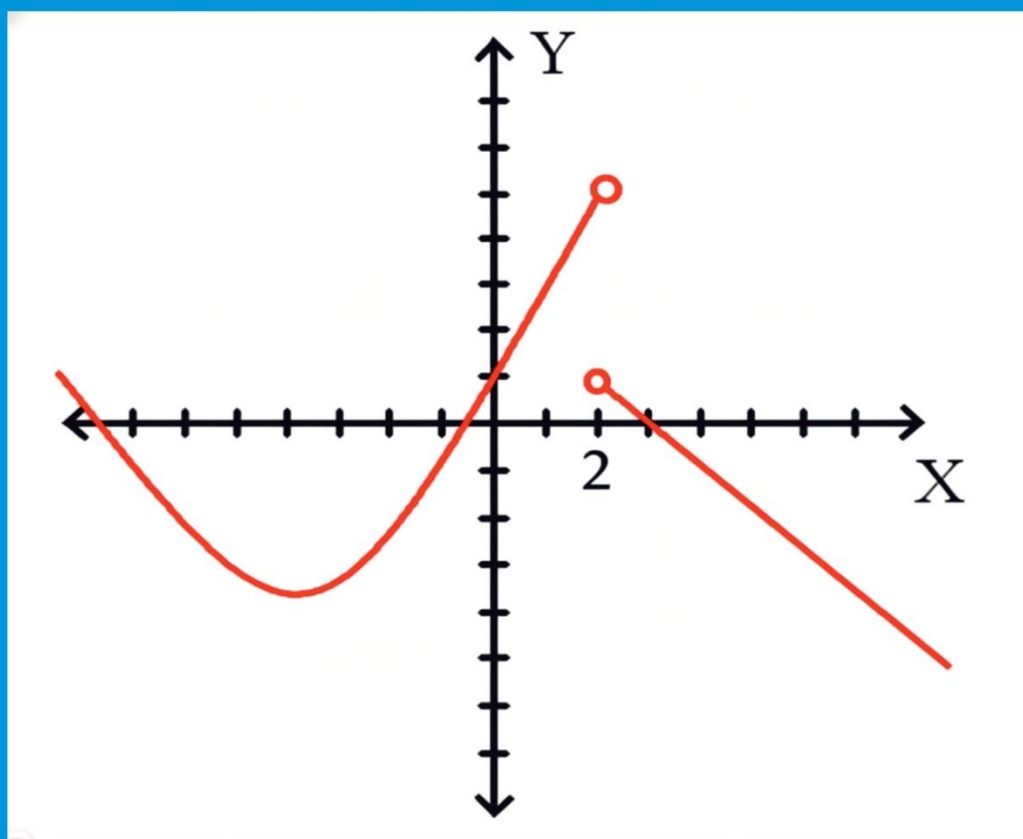


CÁLCULO DE LÍMITES



Leandro Paucara Cahuana

Primera edición, 2025


DOI: <https://doi.org/10.62785/iladesa.b8>

Cálculo de límites

DOI: <https://doi.org/10.62785/iladesa.b.8>

ISBN: 978-612-49706-8-9

Leandro Paucara Cahuana

 <https://orcid.org/0000-0003-0282-7936>

Universidad Nacional de Juliaca, Perú

paucaracl@gmail.com



Leandro Paucara Cahuana

Cálculo de límites

Cálculo de límites

Autor

© Leandro Paucara Cahuana

Editorial:

© Instituto Latinoamericano de Investigación y Desarrollo Social

Av. Arguedas Mz. K Lt. 13, Juliaca - Perú

Teléfono: +51 925 576 639

E-mail: editorial@iladesa.org

Sitio web: <https://editorial.iladesa.org>

Sello editorial: 978-612-49706

Primera edición digital, octubre del 2025

Libro electrónico disponible en: <https://editorial.iladesa.org>

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

ISBN: 978-612-49706-8-9

Depósito Legal N°: 2025-12346

DOI: <https://doi.org/10.62785/iladesa.b.8>

Publicado en Perú / Published in Peru

Todos los derechos reservados.



Índice

Resumen	10
Abstract	11
Introducción	12

Capítulo I

Cálculo de límites

1.1. Evaluación directa y casos especiales	15
1.2. Indeterminaciones y factorización	17
1.3. Método de Ruffini	18
1.4. Fracciones parciales.....	22

Capítulo II

Límites con radicales

2.1. Factor racionalizante.....	25
2.2. Casos con radicales en numerador y denominador	25

Capítulo III

Límites laterales

3.1. Concepto y criterio de existencia.....	32
3.2. Funciones por tramos y valor absoluto.....	33

Capítulo IV

Límites al Infinito

4.1. División por la mayor potencia	40
4.2. Comparación de grados y términos dominantes.....	41
4.3. Casos con signo y cambio de variable.....	43

Capítulo V

Límites infinitos

5.1. Comportamiento ante el “factor cero”	49
5.2. Operaciones con infinito.....	52

Capítulo VI

Límites trigonométricos

6.1. Identidades básicas	54
6.2. Lemas fundamentales	56

Capítulo VII

Límites con exponenciales y logarítmicos

7.1. Propiedades y casos principales	63
--	----

Capítulo VIII

Asíntotas

8.1. Concepto y tipos	69
8.2. Métodos de cálculo	72

Capítulo IX

Continuidad de una función

9.1. Definición y propiedades.....	79
9.2. Continuidad por tipo de función.....	80
9.3. Tipos de discontinuidad.....	81
Bibliografía.....	89

Presentación

Este libro ha sido elaborado para acompañar al estudiante en el aprendizaje progresivo del cálculo de límites, uno de los temas más importantes del análisis matemático y base indispensable para comprender con solidez la continuidad, la derivada, la integral y el estudio del comportamiento de funciones.

La propuesta del texto combina explicación clara, procedimientos paso a paso y una selección de ejercicios orientados a fortalecer el razonamiento algebraico y la interpretación matemática. A lo largo de los capítulos se desarrolla un recorrido ordenado: desde la evaluación directa y la resolución de indeterminaciones, pasando por límites con radicales y límites laterales, hasta llegar a límites al infinito, límites infinitos, límites trigonométricos, exponenciales y logarítmicos. Finalmente, se incorporan capítulos aplicados sobre asíntotas y continuidad, donde el lector integra los conceptos para analizar funciones de manera completa.

Se emplea un lenguaje cercano, con ejemplos resueltos y problemas propuestos, buscando que el estudiante no solo “aplique reglas”, sino que comprenda por qué funcionan y cuándo utilizarlas. Así, este libro puede servir tanto para el trabajo en aula como para el estudio autónomo, convirtiéndose en una guía práctica para quienes desean dominar los límites con seguridad y confianza

El autor

Resumen

Cálculo de Límites ofrece una introducción aplicada al estudio del límite, base para continuidad y cálculo diferencial e integral. El libro guía al estudiante desde la evaluación directa hasta el reconocimiento de situaciones donde la sustitución no basta, explicando criterios de definición y de dominio, con énfasis en el razonamiento y verificación. Se desarrollan las indeterminaciones habituales y presenta técnicas de simplificación mediante factorización, método de Ruffini y fracciones parciales. En los límites con radicales se emplea el factor racionalizante y se analizan casos con raíces en numerador y denominador. Los límites laterales se trabajan con funciones por tramos, valor absoluto y funciones de máximo entero, para decidir cuándo un límite existe y cuándo es unilateral. Más adelante se estudian los límites al infinito mediante división por la mayor potencia, comparación de grados, términos dominantes y cambios de variable, y se introducen los límites infinitos como descripción del crecimiento sin cota y de las asíntotas verticales. El capítulo de límites trigonométricos reúne identidades básicas, lemas fundamentales y estrategias de transformación; el de exponenciales y logarítmicos sistematiza propiedades, formas indeterminadas y la logaritmización. Finalmente, se integran métodos de cálculo de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, y se cierra con continuidad, propiedades por tipo de función y clasificación de discontinuidades. Cada sección incluye ejemplos resueltos, observaciones didácticas y ejercicios propuestos.

Palabras clave: Asíntotas, continuidad, indeterminaciones, límites, radicales.

Abstract

Calculus of Limits offers an applied introduction to the study of limits, the basis for continuity and differential and integral calculus. The book guides students from direct evaluation to the recognition of situations where substitution is not sufficient, explaining criteria for definition and domain, with an emphasis on reasoning and verification. It develops common indeterminacies and presents simplification techniques using factorization, Ruffini's method, and partial fractions. In limits with radicals, the rationalizing factor is used, and cases with roots in the numerator and denominator are analyzed. Lateral limits are worked with piecewise functions, absolute value, and integer maximum functions to decide when a limit exists and when it is one-sided. Later, limits at infinity are studied using division by the highest power, comparison of degrees, dominant terms, and changes of variable, and infinite limits are introduced as a description of growth without bounds and vertical asymptotes. The chapter on trigonometric limits brings together basic identities, fundamental lemmas, and transformation strategies; the chapter on exponential and logarithmic limits systematizes properties, indeterminate forms, and logarithmization. Finally, methods for calculating vertical, horizontal, and oblique asymptotes are integrated, and the book concludes with continuity, properties by function type, and classification of discontinuities. Each section includes solved examples, teaching notes, and suggested exercises.

Key words: Asymptotes, continuity, indeterminacies, limits, radicals.

Introducción

El cálculo de límites constituye el punto de partida del análisis matemático y una herramienta esencial para comprender con rigor el comportamiento de las funciones. A través de los límites es posible describir qué ocurre cuando una variable se aproxima a un valor específico, incluso en situaciones donde la sustitución directa produce indeterminaciones o expresiones no definidas. Esta idea no solo permite “dar sentido” a resultados que a primera vista parecen imposibles, sino que también abre la puerta a conceptos mayores como continuidad, derivación e integración, pilares del cálculo y de múltiples aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Este libro ha sido elaborado con un enfoque didáctico y progresivo, buscando que el estudiante aprenda a resolver límites de manera ordenada y, al mismo tiempo, comprenda por qué cada procedimiento funciona. Se prioriza la claridad en las explicaciones, la secuencia lógica de los temas y el fortalecimiento del criterio matemático, de modo que el lector no dependa únicamente de reglas memorizadas. La intención es que cada método se entienda como una herramienta con propósito, útil para un tipo de problema específico y no como un “truco” aislado.

La obra inicia con los fundamentos del cálculo de límites, presentando criterios básicos, evaluación directa y casos especiales, y avanzando hacia el tratamiento de indeterminaciones mediante técnicas de simplificación algebraica. En este recorrido se refuerza el uso de la factorización y procedimientos como Ruffini, no solo para obtener respuestas, sino para reconocer estructuras y patrones en funciones racionales. Este primer tramo busca consolidar habilidades imprescindibles: identificar el tipo de límite, detectar la dificultad real del ejercicio y escoger la estrategia más eficiente.

Posteriormente, el libro aborda los límites con radicales, un tema donde la racionalización se convierte en un recurso central para eliminar raíces y resolver formas indeterminadas como $0/0$ o ∞/∞ . Se trabaja el uso de conjugados y factores racionalizantes en distintas configuraciones: raíces en el numerador, en el denominador o en ambos, incluyendo también casos que combinan índices diferentes (cuadradas, cúbicas, cuartas, etc.). Esta parte fortalece el dominio algebraico y muestra cómo una transformación adecuada puede convertir un problema complejo en una expresión manejable.

A continuación, se estudian los límites laterales, fundamentales para establecer con precisión cuándo un límite existe. Aquí se desarrolla el análisis por izquierda y por derecha, especialmente en funciones por tramos, expresiones con valor absoluto y funciones con parte entera. En esta sección, el lector aprende que no basta con “calcular” un valor: es necesario verificar condiciones y justificar la existencia del límite, lo cual resulta clave para comprender discontinuidades y comportamientos distintos en un mismo punto según el sentido de aproximación.

En los capítulos siguientes se analiza el comportamiento al infinito y los límites infinitos, donde se profundiza en la comparación de grados, términos dominantes y análisis de signo. Se incluyen estrategias como la división por la mayor potencia, cambios de variable y manipulaciones que permiten estudiar funciones racionales, radicales y combinaciones más elaboradas. Este bloque ayuda a interpretar el crecimiento, decrecimiento y tendencias globales de una función, preparando el terreno para el estudio de asíntotas y para una comprensión más completa del “perfil” de las gráficas.

Finalmente, se desarrollan límites trigonométricos, exponenciales y logarítmicos, apoyándose en identidades básicas, lemas fundamentales y técnicas como la logaritimización para resolver formas indeterminadas del tipo 1^∞ , ∞^0 u otras expresiones equivalentes. El libro culmina integrando los aprendizajes en el estudio de asíntotas y continuidad, donde se sistematiza la identificación de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, y se establecen criterios claros para determinar continuidad y tipos de discontinuidad. En conjunto, el texto ofrece un camino completo, desde lo esencial hasta lo aplicado, combinando teoría accesible con ejemplos resueltos y práctica constante.

Capítulos que contiene el libro: Capítulo I: Cálculo de límites. Capítulo II: Límites con radicales. Capítulo III: Límites laterales. Capítulo IV: Límites al infinito. Capítulo V: Límites infinitos. Capítulo VI: Límites trigonométricos. Capítulo VII: Límites con exponenciales y logarítmicos. Capítulo VIII: Asíntotas. Capítulo IX: Continuidad de una función.

Capítulo I

Cálculo de límites

El cálculo de límites es una de las ideas centrales del análisis matemático y el punto de partida para comprender conceptos como continuidad, derivadas e integrales. En términos sencillos, un límite describe el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un valor determinado, sin necesidad de evaluarla exactamente en ese punto. Esta noción permite estudiar situaciones donde aparecen “saltos”, valores no definidos o expresiones que producen indeterminaciones, pero que en realidad esconden un resultado bien definido.

En este capítulo se presentan los fundamentos del cálculo de límites combinando la interpretación intuitiva (gráfica) con procedimientos analíticos. Se abordarán los casos más frecuentes en funciones racionales, el reconocimiento de formas indeterminadas y las técnicas básicas para resolverlas, como la simplificación algebraica, la factorización y, cuando corresponda, el uso del método de Ruffini. Finalmente, se proponen ejercicios para consolidar habilidades y preparar al lector para los capítulos posteriores.

1.1. Evaluación directa y casos especiales

Para realizar el cálculo de límites hay varias formas de realizarlo, tenemos métodos gráficos en estos generalmente se usa un ordenador o una calculadora por otra parte tenemos los métodos analíticos en estos solo serán necesarios nuestra inteligencia y conocimiento del algebra en este texto se estudiará más la forma de resolver analítica puesto que es la más difundida por los docentes.

Forma analítica (idea básica).

Si al reemplazar directamente el valor de x en la función se obtiene un número real (sin indeterminación), entonces el límite se calcula por sustitución directa.

Caso I. Donde $P(x)$ es un polinomio

$$y = \lim_{x \rightarrow a} P(x)$$

Para determinar el valor de “y” el límite se considerará como una función, es decir:

$$y = \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1. Determine el valor del límite de $f(x) = x^2 + 2$, cuando “x” tiende a 3

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2 = (3)^2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2 = 11 \text{ Rpta}$$

Ejemplo 2. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{2} + 3x - 1$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{2} + 3x - 1 = \frac{(4)^2}{2} + 3(4) - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{2} + 3x - 1 = 19 \text{ Rpta}$$

Ejemplo 3. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 2$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 2 = e^0 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 2 = 3 \text{ Rpta}$$

Ejemplo 4. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) - 6$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) - 6 = \cos(\pi) - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) - 6 = -7 \text{ Rpta}$$

Caso II. Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

$$y = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Para determinar el valor de “y” Se hallarán los valores del numerador y denominador, es decir:

$$y = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Sin embargo, para este caso tendremos criterios.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5. Determine el valor de Z.

$$Z = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 6x + 3}{2x}$$

Solución:

$$Z = \frac{(-3)^2 - 6(-3) + 3}{2(-3)}$$

$$Z = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 6x + 3}{2x} = -5$$

Ejemplo 6. Determine el valor de A.

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{2x+5}$$

Solución:

$$A = \frac{\sqrt{(3)-3}}{2(3)+5} = \frac{\sqrt{0}}{11} = \frac{0}{11}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{2x+5} = 0$$

Ejemplo 7.- Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{17x+5}{x^2-49}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{17x+5}{x^2-49} = \frac{17(7)+5}{(7)^2-49} = \frac{124}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{17x+5}{x^2-49} = \infty$$

Ejemplo 8.- Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{17x-5}{x^4}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{17x-5}{x^4} = \frac{17(0)-5}{(0)^4} = \frac{-5}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{17x-5}{x^4} = -\infty$$

Caso III: Aparece la primera forma de indeterminación

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{0}{0}$, entonces $x = a$ es raíz de los polinomios $N(x)$ y $D(x)$. Por tanto

El valor numérico de:

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)N_1(x)}{(x-a)D_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{N_1(x)}{D_1(x)} = \frac{N_1(a)}{D_1(a)}$$

El último criterio a estudiar en este tipo de límites es la forma indeterminada:

" $\frac{0}{0}$ " *nota en límites esta forma es la que mas abunda*

1.2. Indeterminaciones y factorización

Cuando aparece la indeterminación $0/0$, la estrategia habitual consiste en simplificar la expresión para eliminar el factor que produce el cero, y luego evaluar el límite.

Ejemplos de aplicación

Ejemplo 9. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(2)^2 + (2) - 6}{2(2)^2 - 3(2) - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{0}{0}$$



Nota: Un error frecuente en los estudiantes es asumir que todos los límites racionales son de la forma indeterminada y realizan operaciones innecesarias. Por lo cual se le recomienda al lector que primero evalúe el límite; si en el numerador obtiene cero revise Ejemplo 6 si en el denominador sale cero revise Ejemplo 7.

1.3. Método de Ruffini

El método de Ruffini es una técnica rápida para factorizar polinomios cuando se conoce (o se sospecha) una raíz racional. En el cálculo de límites, se utiliza con frecuencia para eliminar factores como $(x - a)$ que originan indeterminaciones $\frac{0}{0}$. En los ejemplos anteriores se ha mostrado su uso para descomponer polinomios y simplificar expresiones racionales antes de evaluar el límite.

¿Qué hacer? Solo factorizamos. Aquí será con el método de Ruffini

Aunque hay muchos métodos para factorizar Se recomienda al estudiante el método de Ruffini por su simplicidad al momento de factorizar el factor "cero"

$$x^2 + x - 6 = 1x^2 + 1x - 6$$

1	1	-6
2	2	6
1	3	0

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

2	-3	-2
2	4	2
2	1	0

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$$

La respuesta es $x \rightarrow 2$
¿Te das cuenta?
Entonces el divisor será "2"

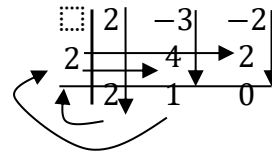
El factor "0"
 $x - 2 = 0$
Es el que se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(2x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)}{(2x + 1)} = \frac{(2) + 3}{2(2) + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)}{(2x + 1)} = \frac{5}{5} = 1 \text{ Rpta}$$

Método de Ruffini consiste en poner los coeficientes del polinomio en la primera fila; el factor a extraer en la primera columna.



Ejemplo 10. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^3 + 7x^2 - 13x - 5}$$

Solución.

Asegúrese de evaluar el límite antes de efectuar la factorización

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^3 + 7x^2 - 13x - 5} = \frac{0}{0}$$

El Factor "0"
 $x - (-\frac{1}{3}) = 0$
 $3 \cdot (x + \frac{1}{3}) = 0 \cdot 3$
 $3x + 1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -14 & -5 \\ -1/3 & & -1 & 5 \\ \hline & 3 & -15 & 0 \end{array}$$

Entonces $3x^2 - 14x - 5 = (3x + 1)(3x - 15)$

¡No! Falta dividir $\frac{3x - 15}{3}$

$$(3x - 15) \Rightarrow \frac{(3x - 15)}{3} = (x - 5)$$

Ahora ¡sí!

$$3x^2 - 14x - 5 = (3x + 1)(x - 5)$$

Seguimos con el otro polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -13 & -5 \\ -1/3 & & -1 & -2 & 5 \\ \hline & 3 & 6 & -15 & 0 \end{array}$$

$$3x^3 + 7x^2 - 13x - 5 = (3x + 1)(3x^2 + 6x - 15)$$

Otra vez debes dividir $\frac{3x^2 + 6x - 15}{3}$

$$(3x^2 + 6x - 15) \Rightarrow \frac{(3x^2 + 6x - 15)}{3} = x^2 + x - 5$$

$$3x^3 + 7x^2 - 13x - 5 = (3x + 1)(x^2 + x - 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^3 + 7x^2 - 13x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{(3x + 1)(x - 5)}{(3x + 1)(x^2 + x - 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{(x - 5)}{(x^2 + x - 5)} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) - 5}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{(x - 5)}{(x^2 + x - 5)} = \frac{-\frac{16}{3}}{-\frac{47}{9}} = \frac{752}{3}$$

¡Fácil! Solo hicimos un paso extra.

¿Dividir por quién?
 $x \rightarrow -\frac{1}{3}$
 El $\frac{1}{3}$

Ejemplo 11. Determine el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 24}{x^2 - 4}$$

Solución: *por division simple*

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x - 24 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-x^4 + 2x^3} \\ +3x^3 + 0x^2 \\ \underline{-3x^3 + 6x^2} \\ +6x^2 + 0x \\ \underline{-6x^2 + 12x} \\ +12x - 24 \\ \underline{-12x + 24} \\ \hline \end{array}$$

$$x^4 + x^3 - 24 = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + 6x + 12)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x - 4 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ +2x - 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^3 + 3x^2 + 6x + 12)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + 3x^2 + 6x + 12)}{(x + 2)} = \frac{44}{4} = 11$$

Prueba tus habilidades.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 6x + 3}{2x^2 + 5} \quad \text{Rpta. } \frac{183}{77}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{4x^2 - 7x - 3}{8x^2 - 14x + 47} \quad \text{Rpta. } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{11.3x^2 + 12x - 34.23}{5x^2 - 0.2} \quad \text{Rpta. } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 - 7x^2 - 14x - 3}{5x^3 + 19x^2 + 11x - 3} \quad \text{Rpta. } -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.6} \frac{3x^2 + 10x - 8}{6x^2 - 7x + 2} \quad \text{Rpta. } 14$$

Ejemplo 12. Determine el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27}$$

Solución.

Aunque el ejercicio es muy fácil de resolver y de repente hasta aburrido la comprensión de este es muy importante para la solución de límites con radicales.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 3^5}{x^3 - 3^3}$$

Para la factorización puedes usar RUFFINI, pero algo más sencillo será usar los conceptos de cocientes notables.

$$x^5 - 3^5 = (x - 3)(x^4 + x^3 \cdot 3 + x^2 \cdot 3^2 + x \cdot 3^3 + 3^4)$$

Factor a eliminar
porque: " $x \rightarrow 3$ "

Este factor será el que llamaremos
"Factor Racionalizante" (FR).
Observarás que es bien sencillo

$$x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)$$

Notar que aquí el Factor es " $(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)$ "

Reemplazamos en el límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^4 + x^3 \cdot 3 + x^2 \cdot 3^2 + x \cdot 3^3 + 3^4)}{(x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 + x^3 \cdot 3 + x^2 \cdot 3^2 + x \cdot 3^3 + 3^4)}{(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)} &= \frac{5 \cdot 3^4}{3 \cdot 3^2} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} &= \frac{5 \cdot 3}{1} = 15 \end{aligned}$$

Ejemplo 13.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x^3 + 8}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - (2)^6}{x^3 + (2)^3}$$

Factor a eliminar
es " $x + 2$ "

El numerador se puede expresar como

$$x^6 - 2^6 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)$$

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Notar que para la solución de este ejercicio se desarrollaron las potencias del **Factor Racionalizante**.

Reemplazamos en el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}$$

Para este caso y el anterior no es necesario reemplazar el " -2 " en el "FR" solo agarrar el último elemento " -32 " y multiplicar por la cantidad de elementos (6).

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)}{(x^2 - 2x + 4)} = \frac{6(-32)}{3(4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x^3 + 8} = -16$$

Ejercicio 13.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1-x^3-3+3x}{(1-x)(1-x^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{-(x^3-3x+2)}{(x-1)(x^3-1)}$$

Factorizando

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(-1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(-1)(x+2)}{(x^2+x+1)} = \frac{-5}{3}$$

Prueba tus Habilidades.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^7 - 78125}{x^4 - 625} \quad Rpta. \frac{875}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{8x^3 - 1}{4x^2 - 1} \quad Rpta. \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{5}} \frac{x^3 + 5}{x^6 - 25} \quad Rpta. \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \quad Rpta. \frac{1}{2}$$

1.4. Fracciones parciales

¿Alguien dijo aplicaciones?

Si usted es de los que piensa que nunca más volverá a usar límites, conviene replantearlo. Los límites tienen múltiples aplicaciones y aparecen con naturalidad en diversos temas de la matemática, especialmente en el cálculo. En esta sección veremos un ejemplo concreto que permitirá apreciar su utilidad de manera clara y directa.

¿Alguien dijo expansión en fracciones parciales?

La expansión en fracciones parciales es un tema clásico del álgebra y del cálculo. Al comienzo, muchos estudiantes la perciben como un “dolor de cabeza” por la cantidad de pasos y el trabajo algebraico que exige. Sin embargo, con un método ordenado y práctica constante, se convierte en una herramienta potente y totalmente manejable. Empecemos, entonces, con un ejercicio típico para comprender el procedimiento y observar cómo el uso de límites puede simplificar el proceso.

Aplicación: integral por fracciones parciales

$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$

Método clásico (sistema de ecuaciones).

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Luego:

$$x^2 + 3x + 7 = (A+B+C)x^2 + (3A+B)x + (2A-2B-C)$$

Este procedimiento implica resolver un sistema de ecuaciones lineales, lo cual, por supuesto, puede consumir bastante tiempo.

Sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 3A + B &= 3 \\ 2A - 2B - C &= 7 \end{aligned}$$

Se obtienen:

$$A = \frac{11}{6}, B = \frac{-5}{2}, C = \frac{5}{3}$$

Método por límites (más directo).

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} (x-1) = \frac{11}{6}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} (x+1) = \frac{-5}{2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} (x+2) = \frac{5}{3}$$

Más fácil, ¿verdad? Note, estimado lector, que este método funciona cuando los factores del denominador que se anulan son distintos y de grado 1 (lineales). Más adelante se estudiarán también casos con factores repetidos y de mayor grado.

Concluimos la integral:

$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)} \right) dx$$

Como ya tengo los valores.

$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \int \frac{11/6}{(x-1)} dx + \int \frac{-5/2}{(x+1)} dx + \int \frac{5/3}{(x+2)} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx = \frac{11}{6} \ln(x-1) - \frac{5}{2} \ln(x+1) + \frac{5}{3} \ln(x+2) + C$$

Ejemplos propuestos

Determinar la expansión de fracciones parciales:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{(x-3)(x+2)(x+5)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+5)}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 5x - 1}{(x-3)(x+2)(x+5)} (x-3) = \frac{4}{5}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x - 1}{(x-3)(x+2)(x+5)} (x+2) = \frac{1}{5}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 5x - 1}{(x-3)(x+2)(x+5)} (x+5) = 1$$

$$\frac{4/5}{(x-3)} + \frac{1/5}{(x+2)} + \frac{1}{(x+5)}$$

Capítulo II

Límites con radicales

En los límites con radicales es frecuente que, al sustituir directamente el valor al que tiende x , aparezcan formas indeterminadas como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverlas, el recurso más usado es racionalizar, es decir, eliminar raíces mediante un producto conveniente. En este capítulo aprenderemos a aplicar el factor racionalizante en diferentes situaciones: con raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y combinaciones en numerador y denominador.

2.1. Factor racionalizante

El factor racionalizante (F.R.) es una expresión que se multiplica y divide con el objetivo de eliminar radicales y simplificar una fracción. En la práctica, casi siempre se usa el conjugado cuando hay raíces cuadradas y, para raíces de índice mayor, se usa la identidad:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

Para la solución de estos ejercicios se abusará del término Factor Racionalizante “F.R.” puesto que para estos ejercicios solo debes de racionalizar y eliminar el término “0”.

Idea clave: racionalizamos para “hacer aparecer” un factor común (por ejemplo, $x - a$) que permita eliminar el cero y luego evaluar el límite sin indeterminación.

2.2. Casos con radicales en numerador y denominador

Caso papayita 1. (raíz cuadrada en el numerador)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$$

Solución. Racionalizamos con el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}^{\text{Conjugados}}}{x} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}^{\text{Conjugados}}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x) - (3-x)}{(x)(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(x)(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lo multiplicamos al numerador y al denominador por el "FR"; en este caso no es más que el mismo par de radicandos solo que con signo cambiado.

Aquí se usa la propiedad de diferencia de cuadrados:
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Observar que las raíces se eliminaron, no se olvide de la ley de signos al operar.

Caso papayita 2. (raíz en el denominador)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$$

Solución. Racionalizamos el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}} \cdot \frac{1 + \sqrt{4x - 7}}{1 + \sqrt{4x - 7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 6)(1 + \sqrt{4x - 7})}{(1)^2 - (4x - 7)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)(1 + \sqrt{4x - 7})}{(-4)(x - 2)} = \frac{3(2)}{-4} = \frac{-3}{2}$$

Se racionaliza de igual manera que el ejercicio anterior solo que aquí se racionaliza al denominador

No se olvide de evaluar el límite solo si es de la forma indeterminada debemos de seguir este procedimiento

Observar que las raíces se eliminaron, no se olvide de la ley de signos al operar.

Atención al operar, luego realizar la factorización y por último eliminar el factor "0".

Caso papayita 3. (radicales en numerador y denominador)

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - \sqrt{9 + x}}{2 - \sqrt{x - 3}}$$

Solución. Racionalizamos ambos:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\overbrace{4 - \sqrt{9 + x}}^{\text{Conjugados}}}{2 - \sqrt{x - 3}} \cdot \frac{\overbrace{4 + \sqrt{9 + x}}^{\text{Conjugados}}}{4 + \sqrt{9 + x}} \cdot \frac{\overbrace{2 + \sqrt{x - 3}}^{\text{Conjugados}}}{\overbrace{2 + \sqrt{x - 3}}^{\text{Conjugados}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(4)^2 - (9 + x)](2 + \sqrt{x - 3})}{[(2)^2 - (x - 3)](4 + \sqrt{9 + x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{[7 - x](2 + \sqrt{x - 3})}{[7 - x](4 + \sqrt{9 + x})} = \frac{2 + (2)}{4 + (4)} = \frac{1}{2} \text{ Rpta}$$

Caso papayita 4. (raíz cúbica: F.R. de orden 3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x}$$

Solución. Usamos el F.R. para cubos:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Factor Racionalizante} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \end{array} \\ \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x} \cdot \frac{\left[(\sqrt[3]{8 + x})^2 + (\sqrt[3]{8 + x}) \cdot 2 + 2^2 \right]}{\left[(\sqrt[3]{8 + x})^2 + (\sqrt[3]{8 + x}) \cdot 2 + 2^2 \right]} \\ \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{(8 + x) - (2)^3}{(x) \left[(\sqrt[3]{8 + x})^2 + (\sqrt[3]{8 + x}) \cdot 2 + 2^2 \right]} \\ \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{x}{(x) \left[(\sqrt[3]{8 + x})^2 + (\sqrt[3]{8 + x}) \cdot 2 + 2^2 \right]} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Caso papayita 5. (se anula “solo” por el denominador)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{3x}}{\sqrt{3 - x}}$$

Conocido así por hacer todo un alboroto y quedar “0”

Solución. Racionalizamos y simplificamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} & \frac{3 - \sqrt{3x}}{\sqrt{3 - x}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3x}}{3 + \sqrt{3x}} \cdot \frac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{3 - x}} \\ \lim_{x \rightarrow 3} & \frac{(9 - 3x)(\sqrt{3 - x})}{(3 - x)(3 + \sqrt{3x})} = \frac{3 \cdot 0}{6} = 0 \end{aligned}$$

Solo bastaba fijarse en el denominador.

Caso papayita 6. (cúbica sobre cuarta)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 27} - 3}{\sqrt[4]{x + 16} - 2}$$

Solución.

Al operar estos 2 se racionalizarán “Se irán las raíces”

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x+27}-3}^{\text{FR1}} \cdot \overbrace{\text{FR2}}^{\text{FR2}}}{\underbrace{\sqrt[4]{x+16}-2}_{\text{FR1}} \cdot \underbrace{\text{FR2}}_{\text{FR2}}}$$

Al operar estos 2 se racionalizarán “Se irán las raíces”

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(x+27)-(3)^3] \cdot \text{FR2}}{[(x+16)-(2)^4] \cdot \text{FR1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \text{FR2} = 32}{[x] \cdot \text{FR1} = 27}$$

Donde

$$\text{FR1} = (\sqrt[3]{x+27})^2 + (\sqrt[3]{x+27}) \cdot 3 + (3)^2$$

$$\text{FR1} = 9 + 9 + 9 = 27; \text{ si reemplazamos } x = 0$$

$$\text{FR2} = (\sqrt[4]{x+16})^3 + (\sqrt[4]{x+16})^2(2) + \dots + (2)^3$$

$$\text{FR2} = 8 + 8 + 8 + 8 = 32; \text{ si } x = 0$$

Caso papayita 7. (mixto con raíz cuadrada y cúbica)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{-9x+1}-2}}{2 - \sqrt[3]{x+11}}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{-9x+1}-2} \cdot \text{FR1}}{2 - \sqrt[3]{x+11} \cdot \text{FR1}}$$

¡ro una simple racionalización

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{-9x+1}-2} \cdot (\text{FR1})^2}{(2 - \sqrt[3]{x+11})(\text{FR1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{-9x}-3} \cdot \text{FR2} \cdot \text{FR3}}{(2 - \sqrt[3]{x+11})(\text{FR1}) \cdot \text{FR2} \cdot \text{FR3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{[(-9x) - (3)^3](\text{FR3})}{[(2)^3 - (x+11)](\text{FR1})(\text{FR2}) \cdot [-9x - 27](\text{FR3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{[-9(x+3)](\text{FR3})}{[-x-3](\text{FR1})(\text{FR2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{[-9(x+3)](\text{FR3})}{[-(x+3)](\text{FR1})(\text{FR2})} = \frac{9 \cdot 12}{4 \cdot 27} = 1$$

Donde:

$$\text{FR1} = \sqrt[3]{\sqrt{-9x+1}+2}$$

$$\text{FR1} = 2 + 2 = 4; \text{ si reemplazamos } x = -3$$

$$\text{FR2} = (\sqrt[3]{\sqrt{-9x}})^2 + (\sqrt[3]{\sqrt{-9x}}) \cdot 3 + (3)^2$$

$$FR2 = 9 + 9 + 9 = 27; \text{ si } x = -3$$

$$FR3 = (2)^2 + (\sqrt[3]{x+11}) \cdot 3 + (\sqrt[3]{x+11})^2$$

$$FR3 = 4 + 4 + 4 = 12; \text{ si } x = -3$$

Caso papayita 8. (mixto con raíz cuadrada y cúbica)

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2}$$

Solución.

Método 1 (F.R.).

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2} \cdot \frac{FR1}{FR1} \cdot \frac{FR2}{FR2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x - 16) \cdot FR2}{(x - 16) \cdot FR1}$$

Piensa en una idea para cambiar el mundo y ponla a trabajar.

Al racionalizar se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{FR2}{FR1} = \frac{32}{8} = 4$$

Donde:

$$FR1 = \sqrt{x} + 4$$

$$FR1 = 2 \cdot 4 = 8; \text{ si reemplazamos } x = 16$$

$$FR2 = (\sqrt[4]{x})^3 + (\sqrt[4]{x})^2 (2) + (\sqrt[4]{x}) \cdot (2)^2 + (2)^3$$

$$FR2 = 4 \cdot 8 = 32; \text{ si } x = 16$$

Método 2 (cambio de variable).

$$\text{Como } mcm(2,4) = 4 \rightarrow x = y^4$$

$$\text{Si } x = 16, 16 = y^4 \rightarrow y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{\sqrt{y^4} - 4}{\sqrt[4]{y^4} - 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{y - 2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y + 2)(y - 2)}{y - 2} = 2 + 2 = 4$$

Caso papayita 9. (quebrados y separación)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt{x} - 4}{x - 4}$$

Quando se Observe más de dos radicales en el numerador o denominador recurrimos a los quebrados.

Solución. Ajustamos constantes para separar:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\overbrace{5\sqrt[3]{2x} - 10}^{\text{1er quebrado}} + \overbrace{10 - 3\sqrt{x} + 6 - 6 - 4}^{\text{2do quebrado}}}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt[3]{2x} - 2) - 3(\sqrt{x} - 2)}{x - 4}$$

Para obtener quebrados solo se reemplaza 4 en el "x".
 $5\sqrt[3]{2x} \Rightarrow 5\sqrt[3]{2 \cdot (4)} = 10$; Se trabaja con este valor aquí se disminuirá y aumentará ese valor. Con el otro caso
 $-3\sqrt{x} \Rightarrow -3\sqrt{4} = -6$, Aquí se aumentará y disminuirá.

Separamos los quebrados

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt[3]{2x} - 2)}{x - 4} - \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{x - 4}$$

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt[3]{2x} - 2)}{x - 4}}_{L_1} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{x - 4}}_{L_2}$$

Se operan los números y se agrupa los quebrados

Trabajamos L_1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(\sqrt[3]{2x} - 2)}{x - 4} \cdot \frac{\text{FR1}}{\text{FR1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5)(2x - (2)^3)}{(x - 4)(\text{FR1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5)(2x - (2)^3)}{(x - 4)(\text{FR1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5)(2)(x - 4)}{(x - 4)(\text{FR1})} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\text{FR1} = (\sqrt[3]{2x})^2 + (\sqrt[3]{2x}) \cdot 2 + (2)^2$$

$$\text{FR1} = 4 + 4 + 4 = 12; \text{ cuando } x \rightarrow 4$$

Trabajamos L_2

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3)(\sqrt{x} - 2)}{x - 4} \cdot \frac{\text{FR2}}{\text{FR2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3)(x - 2^2)}{(x - 4)(\text{FR2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3)(x - 2^2)}{(x - 4)(\text{FR2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3)(x - 2^2)}{(x - 4)(\text{FR2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3)(x-4)}{(x-4)(FR2)} = \frac{3}{4}$$

$$FR2 = \sqrt{x} + 2$$

$$FR2 = 2 + 2 = 4; \text{ cuando } x \rightarrow 4$$

$$L = L_1 - L_2$$

$$L = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

Capítulo III

Límites laterales

En muchos problemas de límites, no basta con acercarse a un punto “sin dirección”. A veces, el comportamiento de la función cambia dependiendo de si nos aproximamos por la izquierda o por la derecha. Para ello se utilizan los límites laterales, una herramienta esencial para determinar si un límite existe o si, por el contrario, solo existe de manera unilateral.

3.1. Concepto y criterio de existencia

Una analogía sencilla: ¿cómo ganar una carrera de atletismo?

Para ganar una carrera de 100 metros no solo basta con correr rápido; además, hay que correr en el sentido correcto y por el carril establecido. Si la competencia está definida de izquierda a derecha, únicamente avanzando en esa dirección se puede llegar a la meta. Si un atleta decide correr en sentido contrario o desviarse, por más rápido que sea, está condenado a perder, porque la competencia está definida en un sentido único.

Esta idea ayuda a entender los límites laterales: el valor del límite puede depender de la dirección desde la cual nos aproximamos.

Definición (límites laterales):

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Ejemplos breves de “dominio definido”

- Formula de Lorentz:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Observe que esta expresión solo está definida si $v \leq c$, Si $v > c$, el radicando es negativo y la fórmula deja de estar definida (en números reales).

3.2. Funciones por tramos y valor absoluto

Para trabajar con límites laterales es común usar funciones definidas por tramos, así como funciones especiales como máximo entero, valor absoluto y signo.

Definición: función máximo entero (parte entera)

$$k \leq \mu(x) < k + 1 \Leftrightarrow \llbracket \mu(x) \rrbracket = k, k \in \mathbb{Z}$$

Reglas prácticas (muy usadas en ejercicios):

- Sí $a \leq u(x) \Rightarrow \llbracket u(x) \rrbracket = a$
- Sí $u(x) \leq c \Rightarrow \llbracket u(x) \rrbracket = c - 1$ (según el intervalo donde cae).

$$\frac{f}{g} > 0, \text{ si } \frac{f}{g} \leq u(x) \text{ ó } u(x) \leq \frac{f}{g}; \llbracket u(x) \rrbracket = \left\lfloor \frac{f}{g} \right\rfloor$$

$$\frac{f}{g} < 0, \text{ si } \frac{f}{g} \leq u(x) \vee u(x) \leq \frac{f}{g}; \llbracket u(x) \rrbracket = -\left\lfloor \frac{f}{g} \right\rfloor - 1$$

Definición. valor absoluto

$$|u(x)| \begin{cases} u(x), \text{ si } u(x) \geq 0 \\ -u(x), \text{ si } u(x) < 0 \end{cases}$$

Definición: función signo

$$\text{sgn } u(x) \begin{cases} 1, \text{ si } u(x) > 0 \\ 0, \text{ si } u(x) = 0 \\ -1, \text{ si } u(x) < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Para máximo entero:

- Sí $4 < \frac{1}{2x} \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor = 4$
- Sí $8x < 6 \Rightarrow \left\lfloor 8x \right\rfloor = 6 - 1 = 5$

$$\frac{4}{5} < \frac{1}{x+3} \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor = 0$$

$$3x \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \left\lfloor 3x \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{6} \right\rfloor = 1$$

$$8x \leq \frac{-4}{3} \Rightarrow \left\lfloor 8x \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$-\frac{7}{2} \leq -5x \Rightarrow \left\lfloor -5x \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$\left\lfloor 8 + 4x \right\rfloor = 8 + \left\lfloor 4x \right\rfloor$$

Para valor absoluto:

- Sí $9x - 4 < 0 \Rightarrow |9x - 4| = -(9x - 4)$

$$5 - 3x^2 < -\frac{1}{2} \Rightarrow |5 - 3x^2| = -(5 - 3x^2)$$

$$8 + 5x^3 > 0 \Rightarrow |8 + 5x^3| = 8 + 5x^3$$

$$|2(x + 4)| = 2|x + 4|$$

Ejemplos resueltos

Naranja 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} x^2 + 4, & \text{si } x \leq 1 \\ 8 - 3x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución.

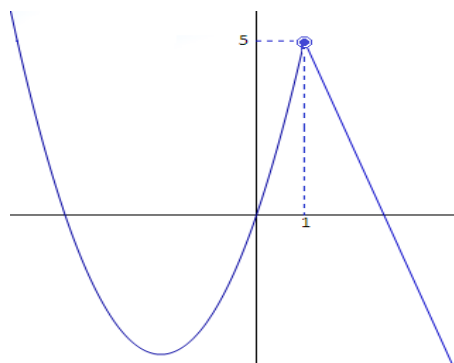
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 4 = (1)^2 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 8 - 3x = 8 - 3(1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

Como ambos límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5 \text{ (existe)}$$

**Naranja 2**

Determine

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} -2 - 3x & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x < 2 \\ x + 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Solución.

Para $x \rightarrow -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -2 - 3x = -2 - 3(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

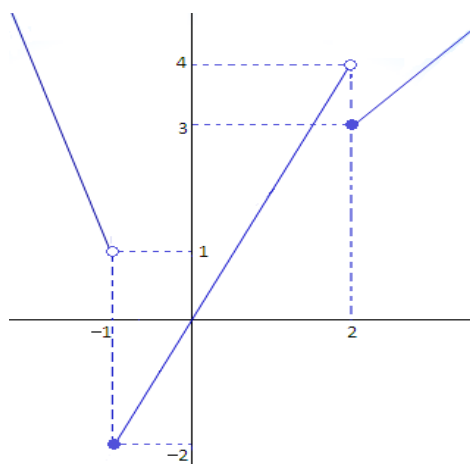
Como son distintos, el límite no existe.

Para $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 2(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = (2) + 1 = 3$$

Con lo cual se concluye que existe y es "3".

**Naranja 3**

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x + 4|}{x^2 - 16}$$

Solución.

Recordemos:

$$|x + 4| \begin{cases} x + 4, & \text{si } x \geq -4 \\ -(x + 4), & \text{si } x < -4 \end{cases}$$

Cuando $x \rightarrow -4^-$ $x < -4$ $x + 4 < 0$ $ x + 4 = -(x + 4)$	Cuando $x \rightarrow -4^+$ $x > -4$ $x + 4 > 0$ $ x + 4 = x + 4$
--	---

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x + 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x + 4}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{1}{-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-(x + 4)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-(x + 4)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{|x + 4|}{x^2 - 16} \neq \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|x + 4|}{x^2 - 16}$$

Lo que implica

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x + 4|}{x^2 - 16} \text{ no existe.}$$

Naranja 4

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x + 3| - 4}{|3x - 5|}, \text{ desde } 2 < x \leq 4$$

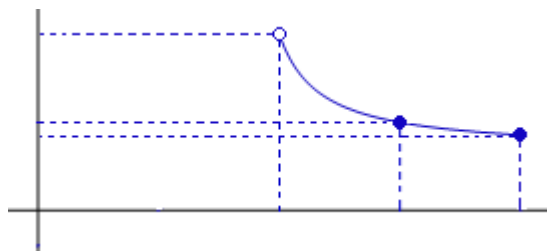
Solución.

Cuando $x \rightarrow 3^+$ $x > 3$ $x + 3 > 0$ $ x + 3 = x + 3$	Cuando $x \rightarrow 3^+$ $x > 3$ $3x > 9$ $3x - 5 > 4$ $ 3x - 5 = 3x - 5$
---	--

$$|x + 3| \begin{cases} x + 3, & \text{si } x \geq 3 \\ -(x + 3), & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$|3x - 5| \begin{cases} 3x - 5, & \text{si } x \geq 3 \\ -(3x - 5), & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 3 - 4}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 1}{3x - 5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Naranja 5

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\llbracket 4 - 2x \rrbracket}{\sqrt{\llbracket x \rrbracket}}$$

Solución

Cuando $x \rightarrow 5^-$ $x < 5$ $4 \leq x < 5$ $\llbracket x \rrbracket = 4$	Cuando $x \rightarrow 5^-$ $x < 5$ $2x < 10$ $9 \leq 2x < 10$ $\llbracket 2x \rrbracket = 9$
--	--

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\llbracket 4 - 2x \rrbracket}{\sqrt{\llbracket x \rrbracket}} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{4 - \llbracket 2x \rrbracket}{\sqrt{\llbracket x \rrbracket}} = \frac{6}{\sqrt{4}} = \frac{-6}{2} = -3$$

Naranja 6

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{12 - \llbracket \frac{x}{3} \rrbracket}{\llbracket 3x \rrbracket - 10}$$

Solución

Cuando $x \rightarrow \frac{1}{6}^-$ $x < \frac{1}{6}$ $\frac{x}{3} < \frac{1}{18}$ $\llbracket \frac{x}{3} \rrbracket = \llbracket \frac{1}{18} \rrbracket = 0$	Cuando $x \rightarrow \frac{1}{6}^-$ $x < \frac{1}{6}$ $3x < \frac{1}{2}$ $\llbracket 3x \rrbracket = \llbracket \frac{1}{2} \rrbracket = 0$
---	---

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^-} \frac{12 - \llbracket \frac{x}{3} \rrbracket}{\llbracket 3x \rrbracket - 10} = \frac{12 - 0}{0 - 10} = \frac{12}{-10} = -\frac{6}{5}$$

Cuando $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ $x > \frac{1}{6}$ $\frac{x}{3} > \frac{1}{18}$ $\llbracket \frac{x}{3} \rrbracket = \llbracket \frac{1}{18} \rrbracket = 0$	Cuando $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ $x > \frac{1}{6}$ $3x > \frac{1}{2}$ $\llbracket 3x \rrbracket = \llbracket \frac{1}{2} \rrbracket = 1$
---	---

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{12 - \llbracket \frac{x}{3} \rrbracket}{\llbracket 3x \rrbracket - 10} = \frac{12 - 0}{0 - 10} = \frac{12}{-10} = -\frac{6}{5}$$

Naranja 7

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil 2x + 3 \rceil - 3x - 2\lfloor x \rfloor}{1 - x}$$

Solución.

Redefinimos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\lfloor x \rfloor + 3 - 3x - 2\lfloor x \rfloor}{1 - x}$$

Notar

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 - 3x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(1 - x)}{1 - x} = 3$$

Del mismo modo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - 3x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(1 - x)}{1 - x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil 2x + 3 \rceil - 3x - 2\lfloor x \rfloor}{1 - x} = 3$$

Naranja 8

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} \left\lceil \frac{2x - 4}{x + 3} + 1 \right\rceil, & \text{si } x \geq 1 \\ |5x - 4|, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left\lceil \frac{2x - 4}{x + 3} + 1 \right\rceil$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left\lceil 2 - \frac{10}{x + 3} + 1 \right\rceil$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - \left\lfloor \frac{10}{x + 3} \right\rfloor + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3 - \left\lfloor \frac{10}{x + 3} \right\rfloor = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |5x - 4|$$

Cuando $x \rightarrow 1^+$

$$x > 1$$

$$x + 3 > 4$$

$$\frac{1}{x + 3} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{x + 3} < \frac{10}{4}$$

$$\left\lfloor \frac{10}{x + 3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2$$

Cuando $x \rightarrow 1^-$

$$x < 1$$

$$5x < 5$$

$$5x - 4 < 1$$

$$|5x - 4| = 5x - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 5x - 4 = 5 - 4 = 1$$

Con lo cual concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe.

¿Alguien dijo prueba mis habilidades?

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} x^2 + 4, & \text{si } x \leq 1 \\ 8 - 3x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} -2 - 3x & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x < 2 \\ x + 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x + 4|}{x^2 - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x + 3| - 4}{|3x - 5|}, \text{ desde } 2 < x \leq 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\lceil 4 - 2x \rceil}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil 2x + 3 \rceil - 3x - 2\lfloor x \rfloor}{1 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \text{ si } g(x) \begin{cases} \left\lceil \frac{2x - 4}{x + 3} + 1 \right\rceil, & \text{si } x \geq 1 \\ |5x - 4|, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Capítulo IV

Límites al Infinito

El estudio de los límites al infinito permite describir el comportamiento de una función cuando la variable crece sin límite ($x \rightarrow \infty$) o disminuye sin límite ($x \rightarrow -\infty$). Esta idea es clave para analizar asíntotas, crecimiento relativo entre funciones y términos dominantes. En este capítulo se trabajarán métodos prácticos y directos: división por la mayor potencia, comparación de grados y técnicas de signo o cambio de variable cuando $x \rightarrow -\infty$.

4.1. División por la mayor potencia

Cuando se tiene un cociente de polinomios, el método más rápido consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca.

Ejemplos resueltos

Fresita 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

Solución

Se resuelve dividiendo al numerador y denominador el “x” de mayor exponente.

En el numerador

$x^2 + x - 6$	El “x” con mayor exponente es x^2
---------------	-------------------------------------

En el denominador

$2x^2 - 3x - 2$	El “x” con mayor exponente es x^2
-----------------	-------------------------------------

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + x - 6}{x^2}}{\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} &= \frac{1 + 0 - 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Otra manera de ver la resolución del ejercicio sería:

Por la comparación de grados entre el numerador y el denominador.

Siendo la función racional.

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_m}$$

Si

$[\text{numerador}]^\circ = m$ $[\text{denominador}]^\circ = n$ Si $m = n$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$	$[\text{numerador}]^\circ = m$ $[\text{denominador}]^\circ = n$ Si $m < n$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	$[\text{numerador}]^\circ = m$ $[\text{denominador}]^\circ = n$ Si $m > n$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
--	--	---

4.2. Comparación de grados y términos dominantes

Para una función racional

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

Fresita 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 61}{7x^4 - 3x^3 - x - 2}$$

Solución. Los grados son iguales (4 y 4). Por la proposición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 61}{7x^4 - 3x^3 - x - 2} = \frac{3}{7}$$

Fresita 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^4 + x^2 - 5}{7x^5 - 33x^3 + 5x - 2}$$

Solución. Grado del numerador: 4 Grado del denominador: 5

Por la proposición.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^4 + x^2 - 5}{7x^5 - 33x^3 + 5x - 2} = 0$$

Fresita 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{61x^7 + x^2 - 52}{13x^3 + 5x - 21}$$

Solución. Grado del numerador 7. Grado del denominador 3

Por la proposición.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{61x^7 + x^2 - 52}{13x^3 + 5x - 21} = \infty$$

Fresita 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2} - \frac{x^2}{x + 2}$$

Solución. Unificamos denominador:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[(x^3)(x + 2)] - [(x^2)(x^2 + 2)]}{(x^2 + 2)(x + 2)} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^4 + 2x^3] - [x^4 + 2x^2]}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - x^4 - 2x^2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3 - 2x^2}{x^3}}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{2 - 0}{1 + 0 + 0 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

4.3. Casos con signo y cambio de variable

Cuando $x \rightarrow -\infty$ aparecen detalles importantes:

$$\sqrt{\quad} x^2 = x$$

Si $x \rightarrow \infty$, entonces $|x| = x$.

Si $x \rightarrow \infty$, entonces $|x| = -x$

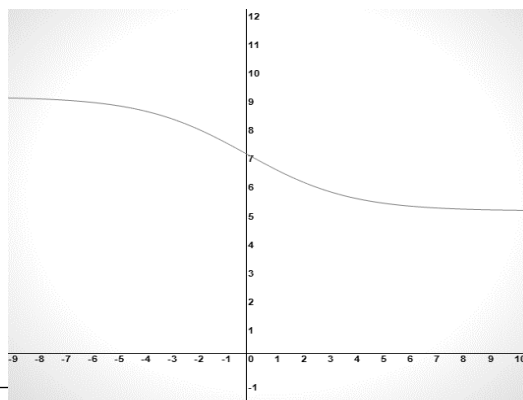
Fresita 6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+2} + 5^{x+1}}{3^x + 5^x}$$

Solución.

Formal

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot 3^2 + 5^x \cdot 5}{3^x + 5^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^x \cdot 3^2 + 5^x \cdot 5}{5^x}}{\frac{3^x + 5^x}{5^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^x}{5^x} \cdot 3^2 + 1 \cdot 5}{\frac{3^x}{5^x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot 9 + 5}{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + \left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot 5}{1 + \left(\frac{5}{3}\right)^x} &= \frac{5 + (0) \cdot 9}{1 + (0)} = 5 \end{aligned}$$



Fresita 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 - 100}}{4x - 15}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 - 100}}{4x - 15} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{x}}{4 - \frac{15}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{x}}{4 - \frac{15}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{\sqrt{x^2}}{x}}{4 - \frac{15}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{\sqrt{x^2}}{x}}{4 - \frac{15}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{\frac{x^2 - 100}{x^2}}}{4 - \frac{15}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{1 - \frac{100}{x^2}}}{4 - \frac{15}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{1 - 0}}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Forma 2

Este método se basa en tomar las variables con exponentes altos. Así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sqrt{x^2}}{4x}$$

Desarrolla la expresión.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

Y listo.

Para resolver por este método se debe tener práctica y de momento solo aplicaremos cuando “ $x \rightarrow \infty$ ”

Fresita 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x - 15}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x - 15} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{\frac{x}{x} - \frac{15}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{1 - \frac{15}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}} \end{aligned}$$

Forma 2

Tomando variable con mayor exponente tanto en el numerador como en el denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{x}$$

Desarrolla la expresión.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3$$

Fresita 9

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x - 15}$$

Solución. En este ejercicio generalizaremos el procedimiento hecho en los ejercicios 4 y 5.

Forma 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x - 15}$$

Dividir numerador y denominador por "x"

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x}}{1 - \frac{15}{x}}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ entonces $x = \sqrt{x^2}$
 Cuando $x \rightarrow -\infty$ entonces $x = -\sqrt{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{9x^2 - 20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}}$$

Unimos las raíces y desarrollamos la división la expresión del Denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}}$$

Desarrollamos la división la expresión del Numerador y reemplazamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}} = \frac{-\sqrt{9}}{1} = -3$$

Forma 2

En el caso de que, $x \rightarrow -\infty$ los límites se calcularán de igual manera que cuando, $x \rightarrow \infty$ sin más que hacer el cambio de x por $-x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x - 15} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9(-x)^2 - 20}}{(-x) - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{-x - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{x}}{\frac{-x - 15}{x}}$$

¿Te diste cuenta? , solo reemplazamos "-x" en los lugares donde había "x" y desarrollamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{\sqrt{x^2} \left(-1 - \frac{15}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 20}}{\sqrt{x^2} \left(-1 - \frac{15}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{-1 - \frac{15}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{20}{x^2}}}{1 - \frac{15}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{-1} = -3$$

Forma 2

Se aplicará después de haber hecho la sustitución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{-x}$$

Desarrolla la expresión.

$$\dots \frac{3x}{-x} \dots$$

Fresita 10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x}{\sqrt{16x^2 - 20}}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x}{\sqrt{16x^2 - 20}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{30x}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2 - 20}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30}{\sqrt{16 - \frac{20}{x^2}}} = \frac{30}{\sqrt{16}} = \frac{15}{2}$$

¿Por qué funciona la FORMA 2?

En si para observar el comportamiento de las funciones en el infinito se observa que solo las variables de mayor exponente intervienen. Fresita 7

En el numerador esta $30x$

En el denominador $\sqrt{16x^2 - 20}$ y este será $\sqrt{16x^2}$ que a su vez $4x$, con lo cual su solución es muy sencilla

Fresita 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Fresita 12

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

¡Aplicando! Cambiando el límite y usando Método 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

Fresita 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 - 4x^3} - \sqrt[4]{x^{12} + 2x^9}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 - 4x^3} - x^3 + x^3 - \sqrt[4]{x^{12} + 2x^9}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - 4x^3} - x^3) - \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9} - x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^6 - 4x^3} - x^3) \cdot \frac{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3}{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^6 - 4x^3})^2 - (x^3)^2}{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 4x^3 - x^6}{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3}{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^3}{x^3}}{\frac{\sqrt{x^6 - 4x^3} + x^3}{x^3}} = \frac{-4}{\sqrt{1+1}} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9} - x^3) \cdot \frac{FR1}{FR1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{12} + 2x^9 - (x^3)^4}{FR1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^9}{FR1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^9}{x^9}}{\frac{FR1}{x^9}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$FR1 = (\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9})^3 + (\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9})^2 \cdot 3 + \dots + (x^3)^3$$

$$\frac{FR1}{x^9} = \frac{(\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9})^3 + (\sqrt[4]{x^{12} + 2x^9})^2 \cdot 3 + \dots + (x^3)^3}{x^9}$$

Reemplazando el límite

$$\frac{FR1}{x^9} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$L = L_1 - L_2 = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

Fresitas 14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^2(2x+4)^4(3x-1)^3}{x^5(3x+2)^3(x+4)}$$

Solución.

Examinando los grados en numerador y denominador dividimos x^9 con lo que nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+5)^2(2x+4)^4(3x-1)^3}{x^9}}{\frac{x^5(3x+2)^3(x+4)}{x^9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+5)^2}{x^2} \frac{(2x+4)^4}{x^4} \frac{(3x-1)^3}{x^3}}{\frac{x^5}{x^5} \frac{(3x+2)^3}{x^3} \frac{(x+4)}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x+5}{x}\right)^2 \left(\frac{2x+4}{x}\right)^4 \left(\frac{3x-1}{x}\right)^3}{1 \cdot \left(\frac{3x+2}{x}\right)^3 \left(\frac{x+4}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{x}\right)^2 \left(2 + \frac{4}{x}\right)^4 \left(3 - \frac{1}{x}\right)^3}{1 \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right)^3 \left(1 + \frac{4}{x}\right)}$$

Reemplazando el límite.

$$\frac{1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^3}{1 \cdot 3^3 \cdot 1} = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^2(2x+4)^4(3x-1)^3}{x^5(3x+2)^3(x+4)} = 16$$

Alguien dijo prueba tus habilidades.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x + 3}{5x^3 + 24x^2 + 2} \quad \text{Rpta. } \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 + 3}{2x^5 + 8} \quad \text{Rpta. } \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21x^2 + 56}{x^3 + 4} \quad \text{Rpta. } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{5x + 4500} \quad \text{Rpta. } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{x^2}{x^3 + 2x}}{x^5} \quad \text{Rpta. } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 3x}{x^4 + 3x^3} - \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 + 2x^2}}{2^{x+3} + 3^{x+4}} \quad \text{Rpta. } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x + 3^x} \quad \text{Rpta. } 81$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x^3 + 20}}{3x} \quad \text{Rpta. } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 32x}}{x - 1} \quad \text{Rpta. } 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x}{\sqrt{x^2 + 20}} \quad \text{Rpta. } 20$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x} - 3x}{x} \quad \text{Rpta. } \frac{1}{3}$$

Capítulo V

Límites infinitos

En algunos límites, la función no se aproxima a un número real, sino que crece sin límite ($+\infty$) o disminuye sin límite ($-\infty$). Estos casos aparecen, por ejemplo, cuando el denominador tiende a cero mientras el numerador permanece distinto de cero, o cuando el crecimiento es desbalanceado. En este capítulo estudiaremos cómo reconocer un límite infinito usando el signo del “factor cero”, y repasaremos reglas básicas para operar con infinito en expresiones comunes.

5.1. Comportamiento ante el “factor cero”

La idea central es:

- Si $\frac{A}{B}$ y $A \rightarrow k \neq 0$ mientras $B \rightarrow 0^+$, entonces $\frac{A}{B} \rightarrow +\infty$ si $k > 0$ y $\rightarrow -\infty$ si $k < 0$.
- Si $B \rightarrow 0^-$, el signo se invierte.

Ejemplos resueltos

Manguito 1

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{x - 6}$$

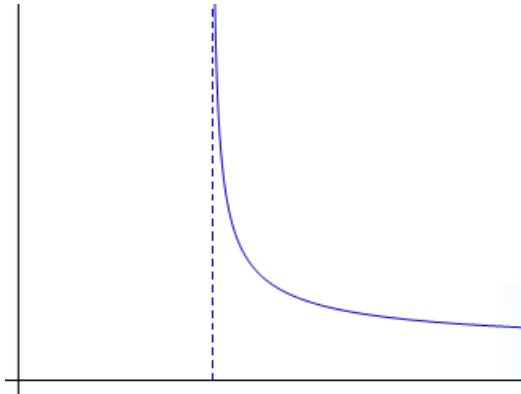
Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{x - 6} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{\sqrt{x^2 - 36}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^2 - 36}{(x - 6)(\sqrt{x^2 - 36})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(x - 6)(x + 6)}{(x - 6)(\sqrt{x^2 - 36})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(x + 6)}{(\sqrt{x^2 - 36})} = \frac{12}{0^+} = \infty$$



Manguito 2

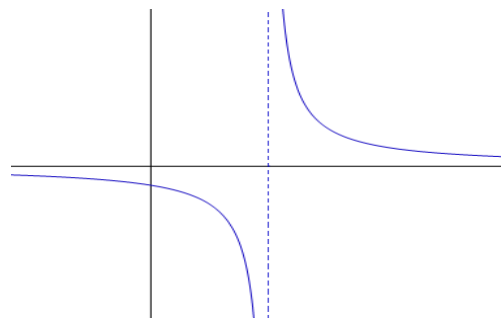
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x - 2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



Manguito 3

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 - x - 6}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x)(x+5)(x+4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(-2)(3)(2)}{(-5)(0^-)} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

Manguito 4

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

Solución.

¿Por qué en el ejercicio 2 sale un 0^- ?

La respuesta es porque: $x \rightarrow 2^-$

Esto quiere decir que: $x < 2$

$$x - 2 < 0$$

Esta desigualdad nos dice que el “0” viene por el lado negativo.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Manguitos 5

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{4-x^2}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{(2+x)(2-x)}$$

Como en el límite: $x \rightarrow 2^-$

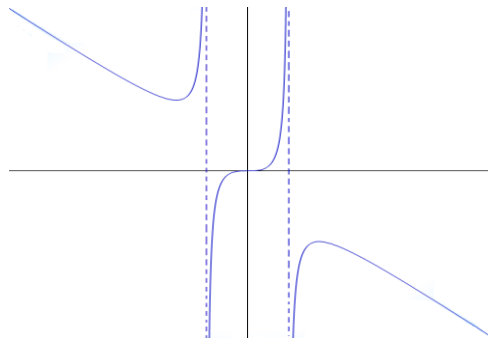
<p>Caso 1. Cuando $x < 2$ $x^2 < 4$ $-x^2 > -4$ $4 - x^2 > 0$ Aquí de frente se sabe que en el denominador es 0^+</p>	<p>Caso 2. Cuando $x < 2$ $-x > -2$ $2 - x > 0$ Aquí observamos que el factor “0” es positivo.</p>
---	--

Reemplazando en el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{(2+x)(2-x)} = \frac{2^3}{(4)(0^+)} = \infty$$

Notar que con el caso 1. Sería de la forma $8/(0^+)$

Dando la misma respuesta.



Manguitos 6

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 8x^2 + 7}{x^2 - x}$$

Solución.

Como en el límite: $x \rightarrow 1^+$

$$\begin{aligned} x &> 1 \\ x - 1 &> 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 8x^2 + 7}{x(x-1)} = \frac{16}{1 \cdot 0^+} = \infty$$

Manguitos 7

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x+1}$$

Solución.

Puesto que se acerca por el lado positivo es “0+”

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x+1} = \frac{(-1)^3}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -1 \cdot \frac{1}{0^+} = -1 \cdot \infty = -\infty$$

5.2. Operaciones con infinito

Se usan reglas prácticas como:

- $\frac{k}{0^+} = +\infty$, $\frac{k}{0^-} = -\infty$ si $k > 0$.
- $a^{+\infty} = 0$ si $0 < a < 1$, y $a^{+\infty} = +\infty$ si $a > 1$.
- Para decidir el signo, siempre revisa el lado: $x \rightarrow a^+$ o $x \rightarrow a^-$.

Manguitos 8

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3x}{x+2}}$$

Solución.

Como en el límite: $x \rightarrow -2^-$

$$\begin{aligned} x &< -2 \\ x + 2 &< 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3x}{x+2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-6}{0^-}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$$

Manguitos 9

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6}{\ln(3x - 8)}$$

Solución. Como en el límite: $x \rightarrow 3^+$

$$\begin{aligned} x &> 3 \\ 3x &> 9 \\ 3x - 8 &> 1 \\ \ln(3x - 8) &> \ln(1) \\ \ln(3x - 8) &> 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6}{\ln(3x - 8)} = \frac{15}{0^+} = \infty$$

Manguitos 10.

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{[x] - x}{6x - x^2}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{[x] - x}{6x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{[x] - x}{x(6 - x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{[x] - x}{x(6 - x)} = \frac{5 - 6}{6(0^+)} = -\infty$$

Cuando $x \rightarrow 6^-$
 $x < 6$
 $5 \leq x < 6$
 $[x] = 5$
 Aparte: $x < 6$
 $-x > -6$
 $6 - x > 0$
 Con lo cual es 0^+

Operaciones con infinito.

Formas determinadas.

Las siguientes operaciones pueden realizarse o son definidas.

$$a + (+\infty) = \infty \quad a + (-\infty) = -\infty$$

$$a * (+\infty) = \infty \text{ si } a > 0 \quad a * (-\infty) = -\infty \text{ si } a < 0$$

$$(+\infty) * (+\infty) = \infty \quad (+\infty) + (+\infty) = \infty$$

Formas indeterminadas.

Las siguientes operaciones no pueden ser realizadas o no están definidas.

$$\infty - \infty = (+\infty) + (-\infty)$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$0 * \infty = 0 * (+\infty)$$

Ejemplos propuestos

$$1. \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 - 5x - 14}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{2}{x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^3}{16 + x^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 8x^2 + 7}{x^2 - x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x + 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3x}{x+2}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6}{\ln(3x - 8)}$$

Capítulo VI

Límites trigonométricos

Los límites trigonométricos son fundamentales en cálculo porque permiten evaluar expresiones que, por sustitución directa, suelen producir indeterminaciones como $0/0$. Su resolución se apoya en dos herramientas principales: (1) identidades trigonométricas para transformar la expresión, y (2) lemas fundamentales (límites notables) cuando el ángulo tiende a cero. En este capítulo se presentan las identidades más usadas, los lemas básicos y una colección de ejemplos resueltos que consolidan el procedimiento.

6.1. Identidades básicas

A continuación, se listan identidades útiles para simplificar expresiones antes de aplicar límites:

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{cos}^2 A = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = \operatorname{sec}^2 A$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 A = \operatorname{csc}^2 A$$

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{csc} B = 1$$

$$\operatorname{cos} B \cdot \operatorname{sec} B = 1$$

$$\operatorname{tan} B \cdot \operatorname{cot} B = 1$$

Identidades por cociente

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A}$$

Suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{sen} B \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

Transformación suma–producto

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A \pm B}{2} \operatorname{cos} \frac{A \mp B}{2}$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \frac{A + B}{2} \operatorname{cos} \frac{A - B}{2}$$

$$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = -2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

Angulo doble

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{cos} 2A = \operatorname{cos}^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cos} 2A)$$

$$\operatorname{cos}^2 A = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} 2A)$$

Identidades por división

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A}$$

Identidades de ángulos negativos

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos}(-\theta) = \operatorname{cos} \theta$$

Angulo complementario

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \operatorname{cos} \theta$$

Angulo suplementario

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos}(\pi - \theta) = -\operatorname{cos} \theta$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}(\pi + \theta) &= -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \operatorname{ctg} \theta & \operatorname{cos}(\pi + \theta) &= -\operatorname{cos} \theta \\ & & \operatorname{sen}(2\pi - \theta) &= -\operatorname{sen} \theta \\ & & \operatorname{cos}(2\pi - \theta) &= \operatorname{cos} \theta \end{aligned}$$

6.2. Lemas fundamentales

Se usarán de manera recurrente los siguientes límites notables (cuando el argumento tiende a 0):

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(u(x))}{u(x)} &= 1 & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(u(x))}{u(x)} &= 1 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{cos}(u(x))}{u(x)} &= 0 & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{cos}(u(x))}{(u(x))^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen}(u(x))}{u(x)} &= 1 & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(u(x))}{u(x)} &= 1 \end{aligned}$$

Ángulo	<i>sen</i>	<i>cos</i>	<i>tg</i>	<i>ctg</i>	<i>sec</i>	<i>csc</i>
0	0	1	0	∅	1	∅
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∅	0	∅	1
π	0	-1	0	∅	-1	∅
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∅	0	∅	-1
2π	0	1	0	∅	1	∅

Ejemplos resueltos

Perita 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} 11x}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} 11x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 8x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} 11x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8 \operatorname{sen} 8x}{8x}}{\frac{11 \operatorname{sen} 11x}{11x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \left(\frac{\operatorname{sen} 8x}{8x} \right)}{11 \left(\frac{\operatorname{sen} 11x}{11x} \right)} &= \frac{8}{11} \end{aligned}$$

Perita 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 3x}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)(1^2 - (\cos x)^2)}{x^2(1 + \cos x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)(\operatorname{sen} x)^2}{x^2(1 + \cos x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)}{(1 + \cos x)} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = \frac{-1}{2} \cdot (1)^2 = \frac{-1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \cdot \frac{(1 + \cos 3x)}{(1 + \cos 3x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\cos 3x)^2}{x^2(1 + \cos 3x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} 3x)^2}{x^2(1 + \cos 3x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(\operatorname{sen} 3x)^2}{(9)x^2(1 + \cos 3x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(\operatorname{sen} 3x)^2}{(3x)^2(1 + \cos 3x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{(1 + \cos 3x)} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \right)^2 = \frac{9}{2} \cdot (1)^2 = \frac{9}{2} \\ L = L_1 + L_2 = \frac{-1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Perita 3

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \left[\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right]}{x-a} \\ \lim_{x \rightarrow a} 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \cdot \frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right]}{x-a} \\ \lim_{x \rightarrow a} 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \cdot \frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right]}{2 \cdot \left(\frac{x-a}{2}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos\left(\frac{2a}{2}\right) = \cos a \end{aligned}$$

Perita 4

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

Solución.

$$\text{Cambio de variable } x - \frac{\pi}{2} = b \rightarrow x = b + \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto: $b \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right)}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right)}{-(b)} \\ \lim_{b \rightarrow 0} \frac{-\sin(b)}{-(b)} &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1 \end{aligned}$$

Perita 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} \right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Perita 6

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$$

Solución.

Cambio de variable $r = \pi - x$ entonces $x = \pi - r$

Por lo tanto: $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - r}{2}\right)}{r} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{r}{2}\right)}{r} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{4}\right)}{r} \\ \lim_{r \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{4}\right)}{4 \cdot \frac{r}{4}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{4}\right) &= 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Perita 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}(2x) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) \cdot [\operatorname{sen}(x)]}{\operatorname{sen}(2x) \cdot [\cos(x)]} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(2x) \cdot [\operatorname{sen}(x)]}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(2x) \cdot [\cos(x)]}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) \cdot \frac{[\operatorname{sen}(x)]}{x}}{2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \cdot [\cos(x)]} &= \frac{\cos(0) \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot \cos(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Perita 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Perita 9

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec x - \operatorname{tg} x$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} & \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)(1 + \operatorname{sen} x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1 + \operatorname{sen} x)} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)} &= \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Perita 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} 3x}{x}$$

Solución.

Sea $\operatorname{arcsen} 3x = \theta \leftrightarrow 3x = \operatorname{sen} \theta$

Con lo cual: $x \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0$

Reescribiendo el límite.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{3}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{3\theta}{\theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}} = \frac{3}{1} = 3$$

Notar que con utilizar el teorema descrito al inicio hubiera salido en un par de patadas.

Perita 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} 5x}{\operatorname{arctg} x}$$

Solución.

Para este ejercicio usaremos los teoremas propuestos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arcsen} 5x}{x}}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \operatorname{arcsen} 5x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{5}{1} = 5$$

Perita12

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (2 - \operatorname{csc} 3\theta)$$

Solución.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left(2 - \frac{1}{\operatorname{sen} 3\theta} \right) = 2 - \frac{1}{0^-} = 2 - (-\infty) = \infty$$

Perita 13

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^4 x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^4 x)}{(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{5}{2}$$

Perita 14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Solución.

$$-1 \leq \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Ejemplos propuestos

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 7x}$ Rpta. $\frac{10}{7}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{tg} bx}$ Rpta. $\frac{a}{b}$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ Rpta. $-\operatorname{sen} x$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\pi - 3x}$ Rpta. $\frac{1}{3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ Rpta. $\frac{1}{2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} 3x$ Rpta. $\frac{1}{3}$
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\operatorname{sen}(x - 4)}$ Rpta. 8
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^7 x}{\cos^2 x}$ Rpta. $\frac{7}{2}$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ Rpta. $\sqrt{2}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ Rpta. 0

Capítulo VII

Límites con exponenciales y logarítmicos

Los límites con funciones exponenciales y logarítmicas aparecen con frecuencia en cálculo porque describen comportamientos de crecimiento, decaimiento y tasas de variación. En muchos casos, la sustitución directa conduce a formas indeterminadas (como $1^\infty, \infty^0, 0/0$), por lo que es necesario aplicar propiedades algebraicas, cambios de variable y, sobre todo, la logaritimización para transformar la expresión y obtener un límite equivalente más manejable.

7.1. Propiedades y casos principales

Para poder resolver este tipo de ejercicios tendrá que tener conocimiento previo de la función exponencial y logaritmo.

Función exponencial

Cuando: $1 < a$	Cuando: $0 < a < 1$	Cuando: $a = 1$ y $a \leq 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$	La función no está definida.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	

Función logaritmo

Cuando: $1 < a$	Cuando: $0 < a < 1$	Cuando: $a = 1$ y $a \leq 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	La función no está definida.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = +\infty$	

Límites de la forma: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$

Caso 1.

Cuando el límite de $f(x)$ y $g(x)$ dan números.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = D$$

Con lo cual: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = C^D$

Caso 2.

Cuando el límite $g(x)$ es infinito y $f(x)$ es un valor determinado en ese punto es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Con lo cual: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = C^{\pm\infty}$

La respuesta final será determinada con las reglas establecidas en la función exponencial. Pag. Anterior.

Caso 3.

Cuando toman casos indeterminados.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Para su solución se realizará lo siguiente:

$$u(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \{ [1 + u(x)]^{1/u(x)} \}^{u(x) * g(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} u(x) * g(x)} \end{aligned}$$

Por favor Recuerde.

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + g(x))^{1/g(x)} = e \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{g(x)} \right)^{g(x)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Solución. Viene a ser el caso 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

Con lo cual

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1^1 = 1$$

Manguito 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{1-2x}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1-2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1+(-2x))^{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left([1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot \frac{-2x}{1}} \right)^{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left([1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot \frac{-2x}{1}} \right)^{\frac{1}{x} \cdot \frac{-2x}{-2x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left([1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}} \right)^{-2} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -2} = e^{-2} \end{aligned}$$

Manguitos 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1-1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left([1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1} \cdot (\cos x-1)} \right)^{\frac{1}{x^2} \cdot (\cos x-1)} \\ e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x-1)}{x^2}} &= e^{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

Manguito 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[1 + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right]^{\frac{1-\operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} \end{aligned}$$

$$e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{tg} x)}$$

$$e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} x) \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}\right)}$$

$$e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} x) \left(\frac{\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}\right)}$$

$$e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x)}$$

$$e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x)} = e^2$$

Manguitos 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{cos} x)}{x^2}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\operatorname{cos} x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cos} x)^{\frac{1}{x^2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Manguito 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{b^{bx} - 1}$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{ax} - 1}{x}}{\frac{b^{bx} - 1}{x}}$$

$$r = e^{ax} - 1 \Rightarrow e^{ax} = r + 1 \Rightarrow ax \ln e = \ln(r + 1)$$

$$x = \frac{\ln(r + 1)}{a} \text{ entonces } r \rightarrow 0$$

$$n = b^{bx} - 1 \Rightarrow b^{bx} = n + 1 \Rightarrow bx \ln b = \ln(n + 1)$$

$$x = \frac{\ln(n + 1)}{b \ln b} \text{ entonces } n \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{ax} - 1}{x}}{\frac{b^{bx} - 1}{x}} = \frac{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\ln(r + 1)}}{\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{b \ln b}}{\ln(n + 1)}} = \frac{a}{b \ln b}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\ln(r + 1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\frac{a \cdot r}{a \cdot r}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\ln(r + 1)}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{r}}{\ln(r + 1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{a}{\ln(r + 1)^{\frac{1}{r}}}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{a}{\ln e} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{b \ln b}{\ln(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{b \ln b}{b \ln b}}{\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{b \ln b}{\ln e} = b \ln b$$

Manguito 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

Solución.

Reescribiendo el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x)^{\frac{1}{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln e + \lim_{x \rightarrow 0} \ln e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = 2$$

Manguito 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$$

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln e = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln(x)) = 1$$

Manguito 9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x-450) - \ln(3x+90))$$

Solución.

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x-450) - \ln(3x+90))$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x-450}{3x+90} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-450}{3x+90}$$

$$y = \ln \frac{2}{3}$$

Manguito 10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{21} - 1)$$

Solución.

Cambio de variable: $\sqrt[n]{21} - 1 = x$ sacando el logaritmo: $n = \frac{\ln(21)}{\ln(x+1)}$ reemplazando:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(21)}{\ln(x+1)}(x) &= \ln(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} \\ &= \ln(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x} \ln(x+1)} \\ &= \ln(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}} \\ &= \ln(21) \frac{1}{\ln(e)} = \ln(21)\end{aligned}$$

Capítulo VIII

Asíntotas

Si una rama de una curva se aleja indefinidamente, con frecuencia la gráfica se aproxima a una recta (o, en algunos casos, a una curva sencilla) que describe su comportamiento “a lo lejos” o cerca de una discontinuidad. A esas rectas (o curvas) se les llama asíntotas y son fundamentales para interpretar y bosquejar funciones.

8.1. Concepto y tipos

Asíntota: es una recta (o curva) a la que la gráfica de $y = f(x)$ se aproxima indefinidamente.

Si alguna parte de una curva se aleja indefinidamente del origen de coordenadas, entonces esta parte (rama infinita de la curva) puede tener a veces una asíntota, es decir, una recta a la que la curva se aproxima indefinidamente por un lado (figura 1) o la corta todo el tiempo (figura 2). Para buscar las asíntotas de una curva que es de la forma explícita $y = f(x)$, las asíntotas verticales se encuentran como puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ y las asíntotas horizontales y oblicuas se representan en la forma $y = kx + b$, donde:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Figura 1

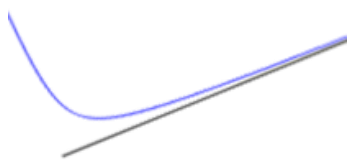
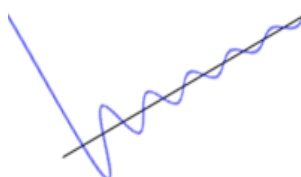


Figura 2



a. Asíntotas verticales

Una recta $x = d$ es asíntota vertical si:

$$\lim_{x \rightarrow d^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Suelen aparecer en ceros del denominador (si no se cancelan con el numerador).

Ejemplo.

Determine las asíntotas verticales de

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 - 9}$$

Solución

Para la resolución:

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 5)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 5)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{3 \cdot 14}{0 \cdot 6} = \infty$$

Por lo cual hay una asíntota en $x = 3$

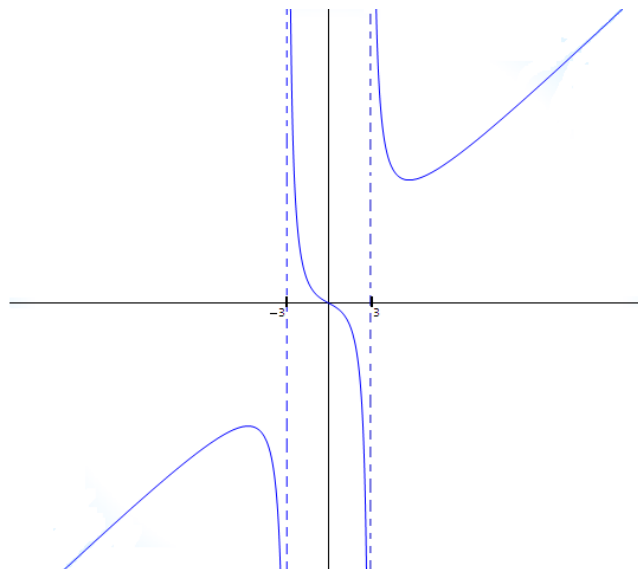
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x^2 + 5)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(-3) \cdot 14}{(-6) \cdot 0} = \infty$$

Por lo cual hay una asíntota en $x = -3$

Alguien dijo ¿Qué significa la Asíntota Vertical?

Es el cambio abrupto de una función en un valor. Por ejemplo:

En una función de oferta y demanda de una marca de gaseosa que pasaría con la demanda de la gaseosa si triplicáramos su costo sin aumentar sus beneficios o la calidad, lógicamente la demanda se reduciría de forma muy rápida hasta alcanzar el valor de cero. Este caso es más visto en la vida real con lo que es la competencia de empresas sobre todo las empresas que se dedican en bienes suplementarios.



b. Asíntotas horizontales

Una recta $y = k$ es asíntota horizontal si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

Ejemplo.

Determine las asíntotas horizontales de

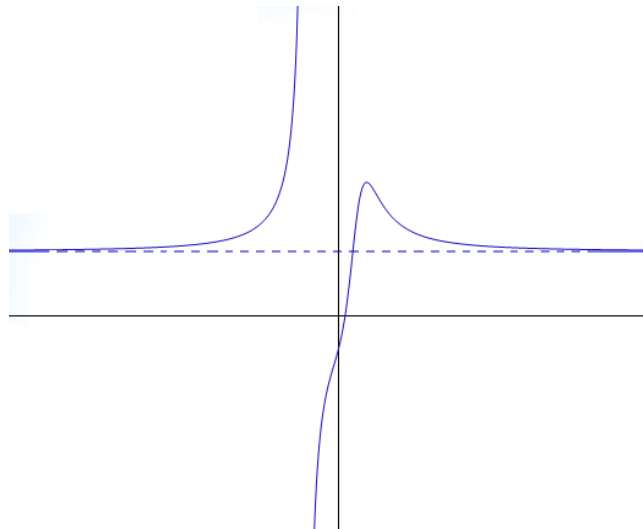
$$f(x) = \frac{4x^3 + 5x - 1}{2x^3 - x + 1}$$

Solución

Para la resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x - 1}{2x^3 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3 + 5x - 1}{x^3}}{\frac{2x^3 - x + 1}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 5x - 1}{2x^3 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(-x)^3 + 5(-x) - 1}{2(-x)^3 - (-x) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 - 5x - 1}{-2x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^3 - 5x - 1}{x^3}}{\frac{-2x^3 + x + 1}{x^3}} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Implica que solo tiene asíntota en $y = 2$



¿Alguien dijo “¿Qué significa una asíntota vertical?”

Una asíntota vertical aparece cuando, al acercarnos a un valor $x=d$, la función crece o decrece sin límite. Dicho de forma sencilla: es un punto donde la gráfica “se dispara” hacia $+\infty$ o $-\infty$, porque la función no puede tomar un valor finito allí.

Ejemplo intuitivo.

Piense en la demanda de una gaseosa: si una marca triplica el precio sin mejorar la calidad, el beneficio o el valor percibido, es razonable que la demanda caiga con mucha rapidez, incluso acercándose a cero. Este tipo de cambios bruscos se observa con frecuencia en mercados competitivos, especialmente cuando existen productos sustitutos (el consumidor se cambia a otra marca). En términos gráficos, el “salto” o caída abrupta ayuda a imaginar el efecto de un comportamiento extremo, similar a lo que en matemáticas interpretamos como una tendencia explosiva cerca de un punto crítico.

c. Asíntotas oblicuas (lineales)

Una recta $y = mx + b$ es asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

Ejemplo.

Determine las asíntotas oblicuas de:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x - 10}{x^3 - 2x + 14}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 10}{x^3 - 2x + 14} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 10}{x^4 - 2x^2 + 14x} = 2$$

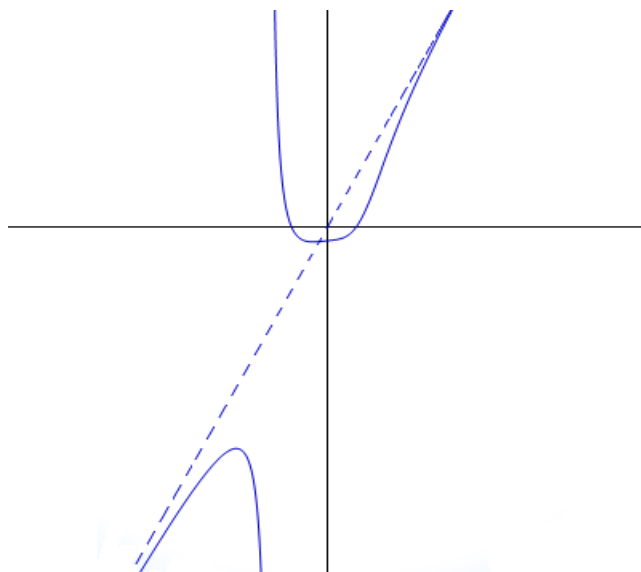
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 10}{x^3 - 2x + 14} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 10 - (2x^4 - 4x^2 + 28x)}{x^3 - 2x + 14}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 25x - 10}{x^3 - 2x + 14} = \frac{0 - 0}{1 - 0 + 0} = 0$$

Implica que solo tiene asíntota en $y = 2x + 0$

$$y = 2x$$

**8.2. Métodos de cálculo**

1. Verticales

- Factoriza y simplifica.
- Si el denominador se hace 0 y no se cancela, hay posible AV.

- Verifica límites laterales d^- y d^+ para el signo.
2. Horizontales
 - Calcula $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$
 - En racionales: compara grados o divide por la mayor potencia.
 3. Oblicuas
 - Calcula $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$
 - Luego $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$
 - Alternativa práctica: división de polinomios (en racionales).
 4. Polinómicas (curvilíneas)
 - Divide (numerador \div denominador).
 - El cociente $P(x)$ es la asíntota si el resto/denominador $\rightarrow 0$.

Ejemplos resueltos

Toronjita 1

Determinar las asíntotas de:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Solución.

Para las asíntotas verticales.

Notar: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Lo que implica que tiene asíntotas en:

$$x = 1 \quad y \quad x = -1$$

Para las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

Lo que implica que no tiene asíntotas horizontales.

Para las asíntotas oblicuas.

Siendo la ecuación $y = mx + b$

Cuando $x \rightarrow \infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x = \infty$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.

$$y = x$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

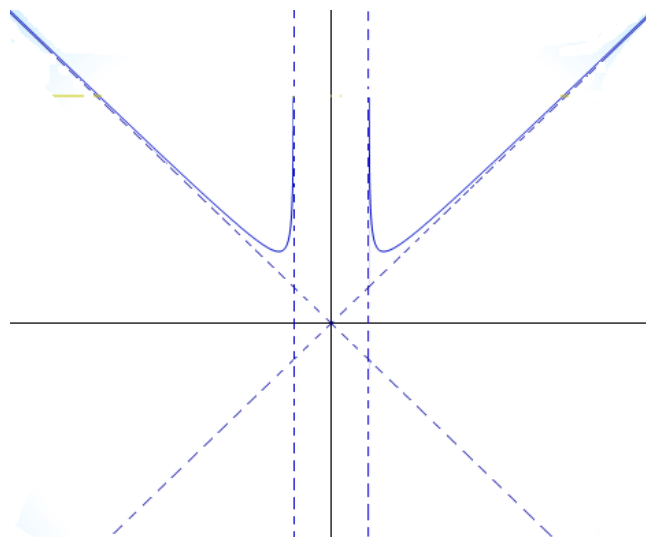
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + x = -\infty$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.

$$y = -x$$



Toronjita 2

Determinar las asíntotas de:

$$y = \frac{\text{sen } 5x}{x}$$

Solución.

Para las asíntotas verticales.

Notar: Que hay un cero en el denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado}$$

Sin embargo, la solución real es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \text{sen } 5x}{5x} = 5$$

Por lo cual no hay asíntotas verticales

Para las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } 5x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sen } 5x}{x} = 0$$

Lo que implica que tiene asíntota horizontal en.

$$y = 0$$

Para las asíntotas oblicuas.

Siendo la ecuación $y = mx + b$

Cuando $x \rightarrow \infty$

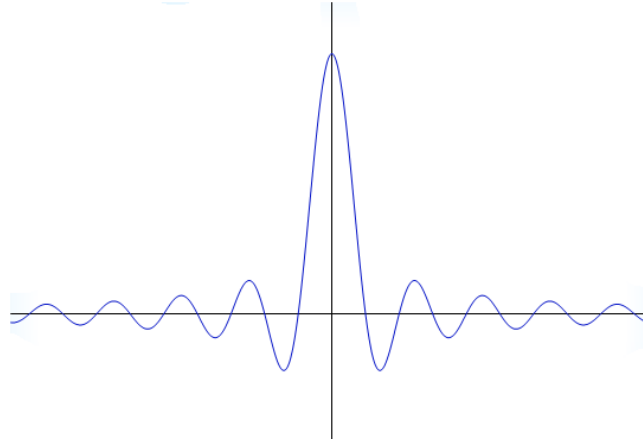
Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\text{sen } 5x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } 5x}{x^2} = 0$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } 5x}{x} - 0 = 0$$

Lo que implica que $y = 0$ es la asíntota horizontal.



Toronjita 3

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Solución.

Para las asíntotas verticales.

Notar: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0} = -\infty$$

Lo que implica que tiene asíntotas en:

$$x = 2 \quad y \quad x = -2$$

Para las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

Lo que implica que no tiene asíntotas horizontales.

Para las asíntotas oblicuas.

Siendo la ecuación $y = mx + b$

Cuando $x \rightarrow \infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 - 4} = 0$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.

$$y = x$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$

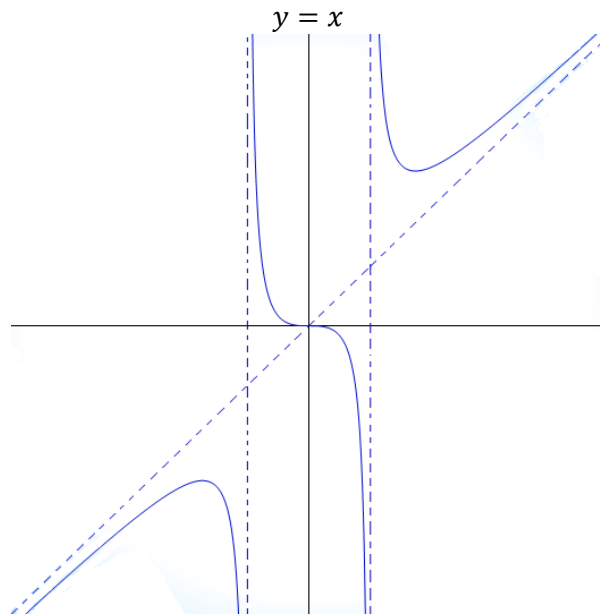
Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + 4x} = 1$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 - 4} = 0$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.



Toronjita 4

$$y = \sqrt{x^2 + x} - x$$

Solución.

Para las asíntotas verticales.

Notar: Que no hay ceros en el denominador.

Por lo cual no hay asíntotas verticales

Para las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$

Lo que implica que las asíntotas horizontales.

$$y = \frac{1}{2}$$

Para las asíntotas oblicuas.

Siendo la ecuación $y = mx + b$

Cuando $x \rightarrow \infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x} = 0$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x - 0 = \frac{1}{2}$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.

Cuando $x \rightarrow -\infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente “m”

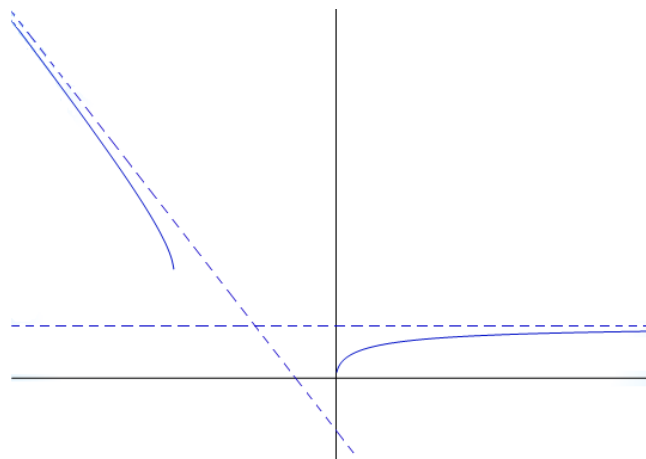
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{-x} = -2$$

Luego hallamos “b”

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) + 2x = \frac{-1}{2}$$

Lo que implica que tiene asíntota oblicua.

$$y = -2x - \frac{1}{2}$$



Toronjita 5

Hallar las asíntotas de la ecuación

$$xy^2 - 3y^2 - 9x - 18 = 0$$

Solución. Despejamos

$$y = \pm \sqrt{\frac{9x+18}{x-3}}$$

Para las asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x+18}{x-3}} = \sqrt{\frac{45}{0}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} -\sqrt{\frac{9x+18}{x-3}} = -\sqrt{\frac{45}{0}} = -\infty$$

Lo que implica que tiene asíntota en:

$$x = 3$$

Para las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x+18}{x-3}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{9x+18}{x-3}} = -3$$

Lo que implica que no tiene asíntotas horizontales.

Para las asíntotas oblicuas.

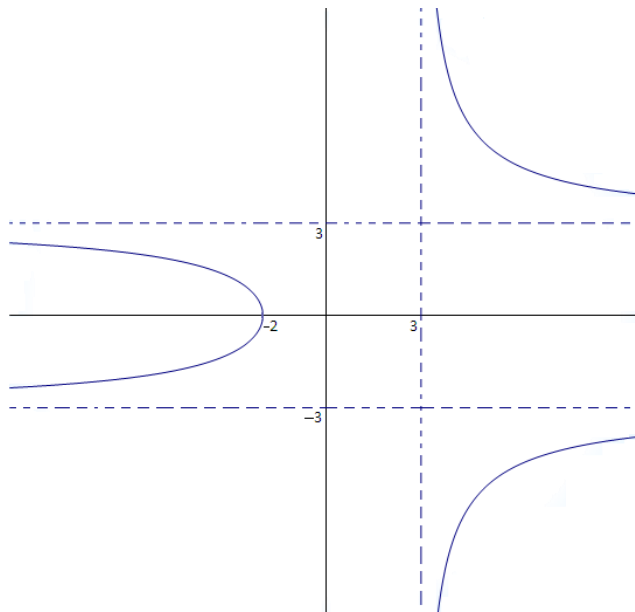
Siendo la ecuación $y = mx + b$

Cuando $x \rightarrow \infty$

Primero procederemos a buscar la pendiente "m"

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x+18}{x-3}}}{x} = 0$$

Con lo cual notamos que no hay asíntotas oblicuas:



Toronjita 6

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

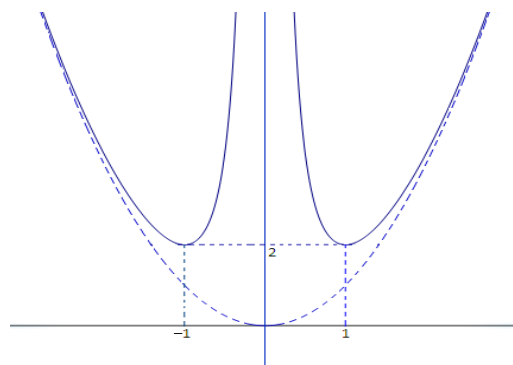
Solución.

Realizando la división: $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Sacando $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

Con lo cual concluimos que tiene una asíntota en

$$y = x^2$$



Capítulo IX

Continuidad de una función

El estudio de la continuidad es uno de los temas más importantes (y también más “delicados”) vinculados a los límites, porque permite describir cuándo una función se comporta “sin rupturas” alrededor de un punto. Una noción clásica muy útil para empezar, dice que una función es continua si su gráfica no presenta huecos ni saltos, es decir, si puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

Para fijar la idea, usemos una analogía: la continuidad es como “el retorno a casa”. Si desde la universidad sigo un camino (la función) hacia mi casa, el recorrido será “continuo” si en el trayecto no desaparezco (no hay huecos) ni “me voy por otro lado” de forma abrupta (saltos o asíntotas).

9.1. Definición y propiedades

Una función " $f(x)$ " es continua para el valor " $x = a$ " si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- | | |
|--|--|
| 1. $f(a)$ existe o está definida | Basta que una de estas condiciones no se cumpla y la función no será |
| 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. "laterales" | |
| 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ | |

CONTINUA

Desde luego, que si más condiciones no se cumple esta función no será continua.

Para la evaluación posterior de continuidad tendremos que saber algunas propiedades de esta en algunas funciones.

9.2. Continuidad por tipo de función

La mayoría de funciones elementales son continuas en todo su dominio. Por eso, en la práctica, estudiar continuidad suele reducirse a determinar el dominio y revisar puntos “críticos” (cambios por tramos o denominadores cero).

a. Funciones polinómicas

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Sera continúa en todo su dominio.

Ejemplos:

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^3 - 58$$

b. Funciones racionales

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Sera continúa en todo su dominio excepto cuando:

$Q(x) = 0$ Ejemplos:

$$y = \frac{x+1}{\text{sen}(x)} \text{ discontinua cuando } \text{sen}(x) = 0$$

$$y = \frac{5x^2+8}{x^2-2x-15} \text{ discontinua en } x = -3 \text{ y } x = 5$$

c. Funciones con raíces (irracionales)

Te das cuenta lo ligado que esta continuidad con el dominio, gran cantidad de funciones elementales son continuas en todo su dominio.

Raíz de índice par:

$$\sqrt[n]{Q(x)} \text{ donde } n: 1, 2, 3, \dots$$

Será continua cuando $Q(x) \geq 0$ ejemplos:

$$\sqrt{x-1} \text{ continua cuando } x-1 \geq 0 \text{ o lo que es lo mismo decir } x \geq 1.$$

$$\sqrt[4]{x^2+5} \text{ continua cuando } x^2+5 \geq 0 \text{ que también se expresa } x^2 \geq -5 \text{ Por lo cual es continua en todo } \mathbb{R}$$

Raíz de índice impar:

$$\sqrt[n-1]{Q(x)} \text{ donde } n: 2, 3, 4, \dots$$

Serán continuas en todo " \mathbb{R} ".

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{4-x^3}$$

$\sqrt[7]{\frac{x+3}{x-1}}$ solo discontinua en $x = 1$

d. Funciones trigonométricas

$\text{sen}(x)$ continua $\forall \mathbb{R}$

$\text{cos}(x)$ continua $\forall \mathbb{R}$

$\text{tg}(x)$ continua en $\mathbb{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

$\text{ctg}(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

$\text{sec}(x)$ continua en $\mathbb{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

$\text{csc}(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

e. Exponenciales y logarítmicas

Son de la forma: a^x es continua en todo \mathbb{R} .

$$\frac{e^x}{777^{2x}}$$

- Continuidad en funciones logarítmicas.

Son de la forma: $\log_a(Q(x))$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ será continua cuando $Q(x) > 0$ ejemplos:

- $\log_3 x + 3$ continua cuando $x > -3$
- $\log_e x = \ln x$ continua cuando $x > 0$

9.3. Tipos de discontinuidad

a. Discontinuidad removable (evitable)

Sera denominada así cuando en un punto $x = a$ si:

1. Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
2. $a \notin D_f$ o si $a \in D_f$ Se contempla que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Su solución se dará en redefinir la función.

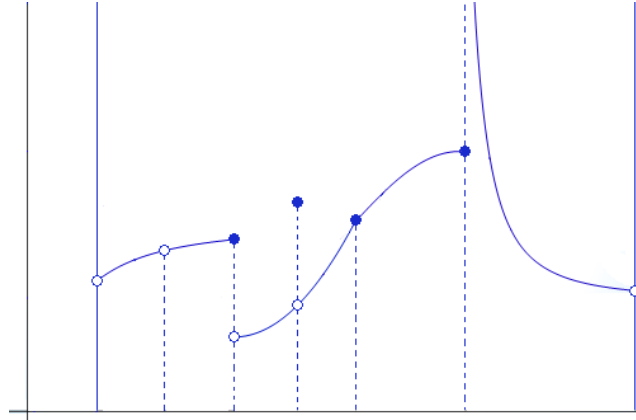
b. Discontinuidad esencial (inevitable)

De salto: existen límites laterales, pero son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Infinita u oscilatoria: alguno de los laterales no existe o es $\pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$



Ejemplos resueltos

Uvita 1

Determine la continuidad de la función $g(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 2 \\ 4 - x, & x > 2 \end{cases}$$

Solución.

Observe que $g(x)$ está definida por tramos mediante expresiones polinómicas. Como los polinomios son continuos en todo \mathbb{R} , la función será continua en cada tramo. Por ello, el único punto donde podría presentarse una discontinuidad es en el cambio de definición, es decir, en el punto de empalme $x=2$.

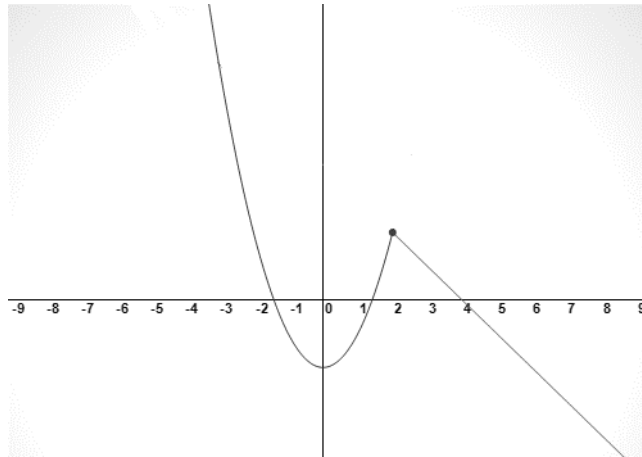
i. $g(2) = (2)^2 - 2 = 2$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 4 - x = 4 - 2 = 2$$

Por lo cual: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$

iii. $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ Por lo cual la función es continua



Uvita 2

Determine la continuidad de la función $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 4x, & x < -1 \\ 5 - 4x^2, & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & 1 < x \end{cases}$$

Solución.

Como en el ejercicio anterior nos preocuparemos en el salto Punto $x = -1$.

i. Notar que $f(-1)$ no está definida

ii. $\lim_{x \rightarrow -1^-} 5 + 4x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 5 - 4x^2 = 1$$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$

iii. Puesto que $f(1)$ no está definido y sin embargo existe

La función tiene discontinuidad evitable en este punto.

Pasaremos a examinar el siguiente salto en el Punto $x = 1$.

i. $f(1) = 5 - 4(1)^2 = 1$

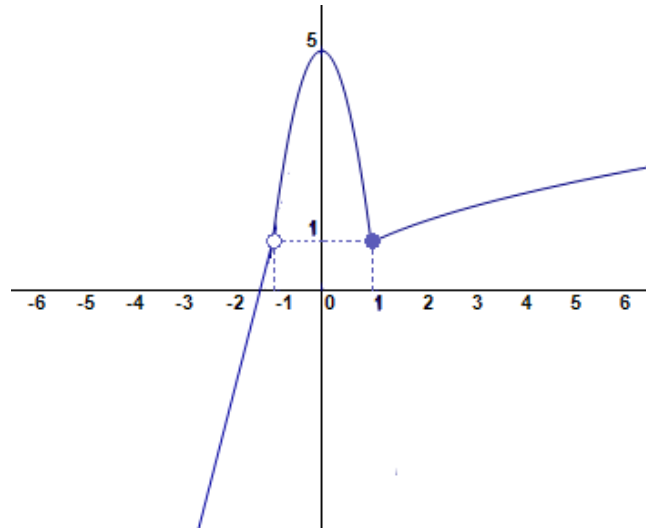
ii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} 5 - 4x^2 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1$$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

iii. Ya que, la función será continua en este punto

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



Uvita 3

Estudiar la continuidad de la función:

$$h(x) = \begin{cases} 2 - \operatorname{sen}(x), & x \leq 0 \\ 1 - 3 \cos(x), & 0 < x \leq \pi \\ \frac{3}{\pi - x}, & \pi < x \end{cases}$$

Solución.

Por propiedad Punto $x = -1$.

i. $h(0) = 2 - \operatorname{sen}(0) = 2$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2 - \operatorname{sen}(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - 3 \cos(x) = -2$

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ no existe

Por lo cual:

iii. Puesto que $h(0)$ está definido y sin embargo no existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

La función tiene discontinuidad inevitable en este punto.

Pasaremos a examinar el siguiente salto en el Punto $x = \pi$.

i. $h(\pi) = 1 - 3 \cos(\pi) = 4$

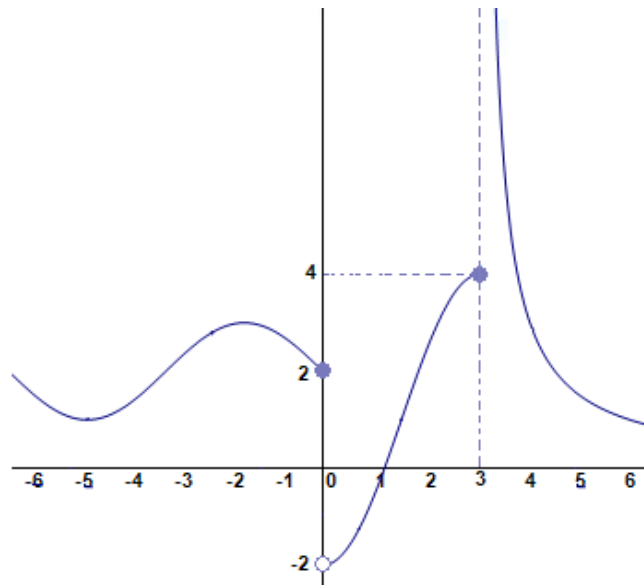
ii. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} 1 - 3 \cos(x) = 4$

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{3}{x - \pi} = \infty$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow \pi} h(x)$ no existe

iii. Ya que: $\lim_{x \rightarrow \pi} g(x)$ no existe

La función tiene discontinuidad esencial en este punto



Uvita 3

Estudiar la continuidad de la función:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - x - 6}$$

Solución.

Para analizar la continuidad primero factorizaremos.

$$y = \frac{(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)(x + 2)}$$

Puesto que es una función racional analizaremos la continuidad en los puntos donde el denominador se hace cero los cuales son: $x = 3$ y $x = -2$

Punto $x = 3$

$$i. \quad y = \frac{(3)^2 + 2(3) - 15}{(3)^2 - (3) - 6} = \frac{0}{0} = \textit{indeterminado}$$

$$ii. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{(x + 5)}{(x + 2)} = \frac{8}{5}$$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow 3} y(x) = 8/5$

iii. Puesto que $y(3)$ no está definido y sin embargo existe la función presenta discontinuidad evitable en este punto.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Pasaremos a examinar el siguiente punto $x = -2$.

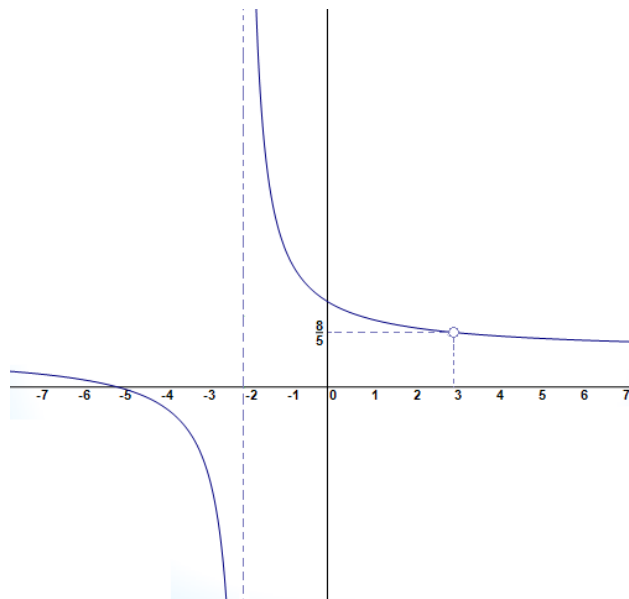
$$i. \quad y(-2) = \frac{(-2)^2 + 2(-2) - 15}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{-15}{0} = \textit{indeterminado}$$

$$ii. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{-15}{0} = \infty$$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow -2} y(x)$ no existe

iii. Puesto que $y(-2)$ y $\lim_{x \rightarrow -2} y(x)$ no existe

La función tiene discontinuidad esencial en este punto



Uvita 4

Determine la continuidad de la función $g(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}, & -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución.

i. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$ esto es lo que debemos hallar

ii.
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)} = \frac{3}{2}$$

Por lo cual
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \frac{3}{2}$$

iii. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)$ Con lo cual $A = \frac{3}{2}$ Rpta

Uvita 5

Determinar “ $a + b$ ” si $h(x)$ es continua en todo \mathbb{R}

$$h(x) = \begin{cases} x + 2a, & x < -2 \\ 3ax + b, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b, & 1 < x \end{cases}$$

Solución.

Estudiamos en el punto $x = -2$.

i. $h(-2) = 3a(-2) + b = -6a + b$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} 3ax + b = -6a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x + 2a = -2 + 2a$$

$$-6a + b = -2 + 2a \Rightarrow b = 8a - 2$$

Por lo cual:

- iii. Del ejercicio se asume que la función es continua por lo que no compararemos.

Estudiamos en el punto $x = 1$.

i. $h(1) = 3a(1) + b = 3a + b$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} 3ax + b = 3a + b$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 2b = 3 - 2b$

Por lo cual: $3a + b = 3 - 2b \Rightarrow b = 1 - a$

- iii. Del mismo modo que en $x = -2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$a = \frac{1}{3} \quad y \quad b = \frac{2}{3}$$

Nos piden $a + b = 1$ Rpta

Uvita 6

Estudie la continuidad de la función y si es discontinua

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

Solución.

Por ser racional se estudiará la continuidad en $x = 0$

- i. $f(0)$ no se encuentra en el dominio

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = 2$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

- iii. $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Con lo cual $f(0) = 2$ Rpta

Uvita 7

Estudie la continuidad de la función.

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Solución.

Por ser racional se estudiará la continuidad en $x = 0$

- i. $h(0)$ no se encuentra en el dominio

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

Por lo cual $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$

- iii. $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ Con lo cual $h(0) = 0$ Rpta

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

1. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 26, & x \leq 5 \\ 4 - x, & x > 5 \end{cases}$ Rpta. cont.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 + 3x, & x < -1 \\ 3x^2 - 5, & -1 < x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \end{cases}$ Rpta. cont en $x = -1$
disc. en $x = 1$

$$3.h(x) = \begin{cases} 5 - \operatorname{sen}(x), & x \leq 0 \\ 1 + 4 \cos(x), & 0 < x \leq \pi \\ \frac{3}{\pi-x}, & \pi < x \end{cases} \quad \text{Rpta. } \begin{array}{l} \text{cont en } x = 0 \\ \text{disc. en } x = \pi \end{array}$$

$$4. y = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - x - 6}$$

$$5.g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{sen}^5(x)}{\cos^2(x)}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$6.h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & 4 \leq x \end{cases}$$

$$7.h(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Bibliografía

- Apostol, T. M. (s. f.). *Calculus, volume 1*. Wiley.
<https://www.google.com/search?q=Apostol+Calculus+Volume+1+Wiley>
- Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219–236. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2292650>
- Leithold, L. (s. f.). *El cálculo con geometría analítica*. McGraw-Hill.
<https://www.google.com/search?q=Leithold+El+c%C3%A1lculo+con+geometr%C3%ADa+anal%C3%ADtica>
- Oehrtman, M. (2014). A way of thinking about the limit concept. *The Journal of Mathematical Behavior*. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.001>
- Piskunov, N. (s. f.). *Cálculo diferencial e integral*. Mir.
<https://www.google.com/search?q=Piskunov+C%C3%A1lculo+diferencial+e+integral>
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (s. f.). *Cálculo*. Pearson.
<https://www.google.com/search?q=Purcell+Varberg+Rigdon+C%C3%A1lculo+Pearson>
- Spivak, M. (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish.
<https://books.google.com/books/about/Calculus.html?id=6jNLPwAACAAJ>
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (6.^a ed.). Cengage Learning.
<https://books.google.com/books/about/C%C3%A1lculo+de+Una+Variable.html?id=nEaywAEACAAJ>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (s. f.). *Thomas' calculus*. Pearson.
https://books.google.com/books/about/Thomas_Calculus.html?id=uRFdDwAAQBAJ



